Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Algebra och Kombinatorik för F3, 5B1302, måndagen den 26 maj 2003.

1. Systemet är ekvivalent med att $x \equiv 2 \cdot 2 \pmod 5$, $x \equiv 3 \cdot 3 \pmod 7$ och $x \equiv 4 \cdot 4 \pmod 9$. Nu kan vi använda kinesiska restsatsen och gör för den skull ansatsen

$$x = a \cdot 7 \cdot 9 + b \cdot 5 \cdot 9 + c \cdot 5 \cdot 7 + n \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9.$$

Vi finner att $3a \equiv 4 \pmod 5$, $3b \equiv 2 \pmod 7$ och $-c \equiv -2 \pmod 9$. Systemets allmänna lösning blir då

Svar. $x = 3 \cdot 7 \cdot 9 + 3 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 5 \cdot 7 + n \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 79 + n315$.

2. a) Halls villkor är inte uppfyllt ty antalet mängder är 6 och

$$|\{a,b,c\} \cup \{a,b,d\} \cup \{c,a,d\} \cup \{b,a\} \cup \{b\} \cup \{d,c,b\}| = |\{a,b,c,d\}| = 4 \leq 6.$$

Alltså finns ingen transversal till mängderna.

b) Vi tolkar mängderna som noder i en nodmängd X och elementen i mängderna som noder i en mängd Y. Vi får en bipartit graf om vi har en kant mellan mängden A_i och elementet x_j precis då $x_j \in A_i$. Enligt a) gäller då att

$$max_{A \subseteq X}(|A| - |J(A)|) \geq 2 \quad \text{(beteckningar enl läroboken).}$$

Alltså måste, enligt känd sats, minst två element läggas till. Detta räcker också. Familjen av mängder

$$\{a,b,c,x\}, \quad \{a,b,d,y\}, \quad \{c,a,d\}, \quad \{b,a\}, \quad \{b\}, \quad \{d,c,b\}$$

har ju transversalen $\{x,y,c,a,b,d\}$.

Svar. Två element.

3. Multinomialutvecklingen av polynomet är

$$(1 + 2x^3 - x^5)^{10} = \sum_{i+j+k=10} \binom{10}{i,j,k} 1^i (2x^3)^j (-x^5)^k.$$

Då $3j + 5k = 38$, $0 \leq i \leq 10$, $0 \leq j \leq 10$, $0 \leq k \leq 10$ bara har lösningarna $(i,j,k) = (2,1,7)$ och $(0,6,4)$ får vi

Svar. $2^1(-1)^7\binom{10}{2,1,7} + 2^6(-1)^4\binom{10}{0,6,4} = -2\frac{10!}{2!1!7!} + 64\frac{10!}{0!6!4!} = -720 + 64 \cdot 210 = 12720.$

4. a) Tillsammans spänner raderna i matriserna H och H' upp ett delrum till Z_2^6 av dimension högst 5. Detta eftersom de har en gemensam rad. Det finns då minst ett ord $c \neq 0$ i Z_2^6 som är ortogonalt mot samtliga rader i H och samtliga rader i H'. Ett sådant ord tillhör både C och C'.

b) Alla möjliga kolonner av längd 3, utom kolonnen $k = (1 \quad 1 \quad 1)^T$, finns med i matrisen H. Så ordet v ligger på avstånd minst två från något ord i C precis då $Hv^T = k$, ty om $Hv^T = k_i \neq k$ så skulle k_i ju vara en kolonn i H och ordet v på avstånd högst ett från något kodord.

Den enda kolonn som saknas i H' är kolonnen $k' = (1 \quad 1 \quad 0)$.

Ett ord v som inte ligger på avståndet 1 eller 0 från något ord vare sig i C eller C' satisfierar då ekvationssystemet

$$Hv^T = k, \quad \text{och} \quad Hv^T = k'.$$

dvs på tablåform

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Detta system har bl a lösningen $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Svar Ja.

5. *Operation 1* Vi ställer först ut männen i en kö. Detta kan ske på 7! olika sätt. Så $n_1 = 7!$.

Operation 2 Därefter placera vi ut kvinnorna, en efter en i utrymmen mellan, framför och bakom männen. Det finns 8 sådana platser. Antal möjligheter blir då $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Således $n_2 = 8!/2!$

För hundarna och katterna finns det nu 16 olika platser att placera dessa på. Inga djur får stå bredvid varandra. Så

Operation 3 Bestämer vilka platser som djuren skall stå på. Av 16 möjliga platser skall vi välja ut 9 till hundarna och katterna. Detta kan ske på $\binom{16}{9}$ olika sätt. Så $n_3 = \binom{16}{9}$.

Operation 4 Placerar ut hundarna och katterna på dessa positioner. Kan ske på 9! olika sätt. Så $n_4 = 9!$.

Svar $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 7! \cdot \frac{8!}{2!} \cdot \binom{16}{9} \cdot 9! = 421803444142080000$.

6. Till varje graf G finns en entydigt bestämd graf $\overline{G}$ med samma nodmängd som den för G men $\overline{G}$ har en kant mellan noderna a och b precis då G saknar en kant mellan noderna a och b. Eftersom varje nod i den kompletta grafen har valensen $n-1$ så kommer komplementet $\overline{G}$ till en $(n-3)$-regulär graf att vara 2-regulär. Talet a_n anger alltså också antalet 2-reguljära grafer med n noder.

En 2-regulär graf består av ett antal cykler. Låt n_i beteckna antalet cykler av läng i. Då gäller för en 2-regulär graf med n stycken noder att

$$3n_3 + 4n_4 + \ldots + kn_k = n \quad \text{och} \quad n_1 = 0, \quad n_2 = 0.$$

Antalet olika 2-reguljära grafer är alltså lika med antalet sätt att dela upp talet n som en summa av 3:or, 4:or, ... Den genererarande funktionen för talföljden a_n blir alltså

Svar $\prod_{i=3}^{\infty}(1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \ldots) = \prod_{i=3}^{\infty} \frac{1}{(1-x^i)}$.

7. Antag att

$$G =< a >= \{a, a^2, \ldots, a^k = id\}$$

$$H =< b >= \{b, b^2, \ldots, b^n = id\}$$

$$K =< c >= \{c, c^2, \ldots, c^m = id\}.$$

Gruppen $G \times H \times K$ består då av de $k \cdot n \cdot m$ elementen (a^s, b^t, c^r) där $0 \leq s \leq k$, $0 \leq t \leq n$ och $0 \leq r \leq m$. Antag att talet d delar både k och n: $k = d \cdot p$ och $n = d \cdot q$. Då gäller

$$(a^s, b^t, c^r)^{knm/d} = ((a^k)^{s\frac{n}{d}m}, (b^n)^{t\frac{k}{d}m}, (c^m)^{r\frac{n}{d}k}) = (id, id, id).$$

Vår slutsats blir att om minst en av de största gemensamma delarna $sgd(k, n)$, $sgd(m, n)$ och $sgd(k, m)$ inte är 1 så är $G \times H \times K$ inte cyklisk.

Antag nu att samtliga dessa största gemensamma delare är 1. Vi visar att då genereras gruppen $G \times H \times K$ av elementet (a, b, c).

Antag $(a, b, c)^t = (id, id, id)$. Då gäller $a^t = id$. Enligt känd sats måste då talet k dela talet t. På samma sätt har vi att talen n och m delar talet t. Om talen k, n och m saknar gemensam delare måste då $t = dknm$ för något tal d. Eftersom $(a, b, c)^{knm} = (id, id, id)$ så måste nu (a, b, c) ha ordning knm.

8. Ringen $Z_2[x]/ < (x + 1)^n >$ består av ploynomen

$$\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_i \in Z_2 \quad \text{för} \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Invertibla element är de polynom $p(x)$ som är relativt prima till $(x + 1)^n$. Polynomen $p(x)$ och $(x+1)^n$ är relativt prima precis då de saknar någon gemensam delare. Eftersom entydig uppdelning i irreducibla faktorer gäller i $Z_2[x]$ så vore de enda gemensamma delarna av formen $(x + 1)^k$ för något tal k. Detta inträffar precis då 1 är ett nollställe till $p(x)$. Invertibla element i denna kvotring är alltså de polynom $p(x)$ sådana att $p(1) \neq 0$. Antalet sådana är lätt att bestämma då

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} \Rightarrow p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}.$$

Så $p(1) \neq 0$ precis då ett udda antal av koefficienterna $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ är skilda ifrån noll. Vi får

Svar 2^{n-1}.