Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Algebra och Kombinatorik för F3, 5B1302, måndagen den 12 januari 2004 klockan 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

Tillåtna hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna.

Betygsgränser: 10 poäng ger betyget 3, 14 poäng ger betyget 4 och 18 poäng ger betyget 5.

1. (3p) Ange fem olika ideal i ringen Z_{56}.

2. (4p) En viss felrättande kod C har kontrollmatrisen

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestäm antalet ord i koden, rätta ordet 11110, ange ett ord som inte går att rätta, dvs som ligger på ett avstånd av minst två från alla kodord, samt bestäm totala antalet ord som inte går att rätta.

3. (2p) För en given planär graf gäller att den är 3-reguljär, dvs varje nod har graden 3 (eller valensen 3), och att antalet områden (inklusive det yttre området) är 6. Visa att denna information räcker för att entydigt bestämma antalet kanter och antalet noder i grafen.

Varning: Bevis som bygger på grafritning kommer antagligen att ej kunna betraktas som ett komplett bevis.

4. (3p) Nio olika kulor, nr 1, nr 2, nr 3, ..., nr 9, läggs i tre icketomma högar, (eller delmängder om man så vill). På hur många olika sätt kan detta ske om
a) kula nr 1 och kula nr 2 ligger i olika högar.
b) alla högar innehåller samma antal element.
c) båda villkoren under a) och b) ovan är uppfyllda.

5. (3p) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $x^{12} + x + 1 = 0$ i polynomringen Z_{143}.

6. (3p) De abelska grupperna G_1 och G_2 innehåller 140 respektive 315 element. Visa att mängden H av gemensamma elementen i dessa grupper, dvs

$$H = G_1 \cap G_2,$$

är en cyklisk grupp.

V.G. V.

7. (3p) Lös den Diofantiska ekvationen

$$63n + 105m + 401p = 2.$$

Minst två olika lösningssvar skall anges.

8. (3p) Betrakta den ändliga kroppen Z_2 och polynomet $p(z) = z^5 - 1$. Undersök om det finns någon kropp F sådan att Z_2 är en delkropp till F och sådan att $p(z)$ fullständigt går att faktorisera i F:

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4)(z - \alpha_5)$$

där $\alpha_i \in F$ för $i = 1, 2, \ldots, 5$. Bestäm det minsta antal element en sådan kropp måste innehålla.