

Topologisk kombinatorik
Doktorandkurs 5B5253, KTH
Höstterminen 2004

Inlämningsuppgifter 3

Lämna till den 12 januari in lösningar till så många av följande uppgifter som möjligt. Om du inte har postfack på matteinstitutionen/KTH meddela också postadress dit jag kan skicka de rättade lösningarna.

[M] sid 102: 1, 2, 3

[M] sid 107: 1

[M] sid 111: 2, 3

7. Bestäm homotopityp för följande pomängd:

8. Ett ändligt simpliciellt komplex Δ kallas ett *matroidkomplex* om det satisfierar

$$A, B \in \Delta, |A| < |B| \Rightarrow \exists x \in B \setminus A \text{ sådant att } A \cup \{x\} \in \Delta.$$

- (a) Visa att sådana komplex är skalbara.
- (b) Visa att ett matroidkomplex är kontraktibelt om och endast om det är en kon.

9. Betrakta (för grafer med hörnmängd $[n]$) den monotona grafegenskapen P_n att (bortsett från isolerade hörn) vara en *stjärna*, dvs ett träd med högst ett hörn av grad > 1 . Bestäm homotopityp för komplexet P_n . Är egenskapen *stjärna* skygg?

10. Visa med ett exempel att man kan köra fast när man försöker kollapsa ett kollapsibelt komplex.

11. Låt A vara ett ändligt alfabet, $|A| = n$. Ett ord u är ett *delord* av ett ord $w = a_1 a_2 \dots a_q$, $a_i \in A$, om $u = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ för någon delsvit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq q$. Ett ord $w = a_1 a_2 \dots a_q$ är *injektivt* om alla bokstäver är parvis olika, dvs $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$. Låt P_A vara pomängden av alla icke-tomma injektiva ord i alfabetet A , ordnade med delords-relationen.

Visa att $\Delta(P_A)$ är homotopi-ekvivalent med en bukett av $(n-1)$ -dimensionella sfärer, och att antalet sfärer i buketten är lika med antalet permutationer av $\{1, 2, \dots, n\}$ utan fixpunkter (det s.k. derangement-talet D_n).

12. Låt K vara en reguljär CW uppdelning av 2-sfären [M, §4.5]. För varje 2-cell, låt en bil köra motsols runt dess rand. Bilarna rör sig med godtyckliga hastigheter, stannar aldrig, och besöker varje punkt på randen till "sin" cell oändligt ofta.

Visa att antingen måste det uppstå en frontalkollision i det inre av en 1-cell, eller en totalcollision i en 0-cell med samtliga bilar från de angränsande 2-cellerna inblandade.