Lösningsförlag till inlämningsuppgifter vecka 1

2002-11-03

Uppgift 1 Bestäm samtliga positiva heltalslösningar till ekvationen

$$205x + 215y = 13705.$$

Lösning: För att det skall kunna finnas några lösningar till ekvationen måste 13705 vara delbart med $\mathrm{sgd}(205, 215)$. Vi kan använda Euklides algoritm för att bestämma den största gemensamma delaren mellan 205 och 215.

$$\begin{aligned} 215 &= 1 \cdot 205 + 10 \\ 205 &= 20 \cdot 10 + 5 \\ 10 &= 2 \cdot 5 + 1 \end{aligned}$$

Den största gemensamma delaren är därmed 5 och vi ser att $13705 = 5 \cdot 2741$. Vi kan följa algoritmen baklänges för att uttrycka 5 som $215m + 205n$ för några heltal m och n.

$$\begin{aligned} 5 &= 205 - 20 \cdot 10 = 205 - 20(215 - 1 \cdot 205) \\ &= 21 \cdot 205 - 20 \cdot 215 \end{aligned}$$

Vi får en lösning till vår ekvation genom att multiplicera detta med 2741, dvs $x = 21 \cdot 2741 = 57561$, $y = -20 \cdot 2741 = -54820$. För att få samtliga lösningar måste vi lägga till den homogena lösningen, dvs lösningarna till ekvationen $205x + 215y = 0$. Efter att ha delat med den största gemensamma delaren blir detta $41x + 43y = 0$. Nu saknar 41 och 43 gemensamma delare, och vi får att den allmänna lösningen till $41x + 43y = 0$ ges av $x = -43k$, $y = 41k$, för godtyckliga heltal k.

Detta betyder att samtliga heltalslösningar till vår ursprungliga ekvation ges av

$$\begin{cases} x &= 57561 - 43k \\ y &= -54820 + 41k \end{cases}$$

Inte alla dessa är positiva. För att både x och y skall vara positiva krävs att

$$\begin{cases} 0 &< 57561 - 43k \\ 0 &< -54820 + 41k \end{cases}$$

vilket betyder att k ska vara större än $54820/41$ men mindre än $57561/43$. Det enda heltal som ligger i detta intervall är $k = 1338$ och sätter vi in detta båda värde på k får vi $x = 27$, $y = 38$.

Svar. Det finns endast en positiv lösning $(x, y) = (27, 38)$.