

## Lösningförlag till inlämningsuppgifter vecka 2

2002-11-10

**Uppgift 1** Använd sällprincipen för att bestämma hur många positiva heltal som är mindre än 2916 och som saknar gemensamma delare med 4669.

*Lösning:* Eftersom ett tal som har en gemensam delare med 4669 också måste ha en gemensam primtalsfaktor med 4669, och tvärtom, är det intressant att veta vilka primtal som delar 4669. Vi kan pröva oss fram genom att dela med primtalen, ett efter ett. Vi får att 2, 3 och 5 inte delar 4669, medan 7 gör det. Vi fortsätter att leta efter faktorer i  $4669/7 = 667$ . Vi provar med 11, 13, 17, 19, men får napp först vid 23. Vi delar med 23 och nu återstår  $667/23 = 29$  som är ett primtal. Vi har fått fram att  $4669 = 7 \cdot 23 \cdot 29$  är en primtalsfaktorisering.

De heltal som har en gemensam delare med 4669 är precis de tal som är delbara med något av primtalen 7, 23 och 29. Eftersom vi är intresserade av positiva heltal som är mindre än 2916 bildar vi mängden  $A = \{1, 2, \dots, 2915\}$ . Det finns nu tre intressanta delmängder,  $A_7$ ,  $A_{23}$  och  $A_{29}$  som består av multiplerna av 7, 23 respektive 29. Vi söker de tal som inte är delbara med något av dessa, dvs av komplementet till unionen  $A_7 \cup A_{23} \cup A_{29}$  i  $A$ . Enligt sällprincipen har vi att

$$|A_7 \cup A_{23} \cup A_{29}| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$$

där

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= |A_7| + |A_{23}| + |A_{29}| \\ \alpha_2 &= |A_7 \cap A_{23}| + |A_7 \cap A_{29}| + |A_{23} \cap A_{29}| \\ \alpha_3 &= |A_7 \cap A_{23} \cap A_{29}|\end{aligned}$$

Eftersom 7, 23 och 29 är olika primtal kommer  $A_7 \cap A_{23}$  att vara de positiva heltal som är delbara med  $7 \cdot 23 = 161$ , och så vidare.

För att få reda på hur många av talen i  $A$  som är delbara med ett heltal  $n$  ser vi att multiplerna av  $n$  är  $\{n, 2n, 3n, \dots, mn\}$  och det största av dessa är  $m \cdot n$  där  $m$  är kvoten vid division av 2915 med  $n$ . Alltså ges antalet tal i  $A$  som är delbara med  $n$  av heltalsdelen av  $2915/n$ .

Vi får nu

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= |A_7| + |A_{23}| + |A_{29}| = \lfloor \frac{2915}{7} \rfloor + \lfloor \frac{2915}{23} \rfloor + \lfloor \frac{2915}{29} \rfloor = 416 + 126 + 100 = 642 \\ \alpha_2 &= |A_7 \cap A_{23}| + |A_7 \cap A_{29}| + |A_{23} \cap A_{29}| = \lfloor \frac{2915}{7 \cdot 23} \rfloor + \lfloor \frac{2915}{7 \cdot 29} \rfloor + \lfloor \frac{2915}{23 \cdot 29} \rfloor = 18 + 14 + 4 = 36 \\ \alpha_3 &= |A_7 \cap A_{23} \cap A_{29}| = \lfloor \frac{2915}{7 \cdot 23 \cdot 29} \rfloor = 0\end{aligned}$$

där  $\lfloor x \rfloor$  betyder heltalsdelen av talet  $x$ . Antalet tal som har gemensamma delare med 4669 ges därmed av

$$|A_7 \cup A_{23} \cup A_{29}| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 642 - 36 + 0 = 606.$$

Antalet element i komplementet blir således  $2915 - 606 = 2309$  och det är så många tal som inte har några gemensamma delare med 4669.

**Svar.** Det finns 2309 positiva heltal som är mindre än 2915 som saknar gemensamma delare med 4669.