Lösningsförlag till inlämningsuppgifter vecka 3

2002-11-17

Uppgift 1 De fyra permutationerna p, q, r och s ges i enradsnotation av $p = 147258396$, $q = 135647928$, $r = 254813976$ och $s = 753169824$. Bestäm deras typ och tecken och avgör om några är konjugerade med varandra. Finn i så fall en permutation som åstadkommer konjugeringen.

Lösning: Vi börjar med att skriva om permutationerna med cykelnotation. För p får vi $p(1) = 1$, så 1 är en fixpunkt. $p(2) = 4$ och $p(4) = 2$ vilket ger tvåcykeln (24), och så vidare. Cykelnotationen för de fyra permutationerna blir på så sätt

$$\begin{aligned} p &= (1)(24)(37)(5)(689) \\ q &= (1)(23546798) \\ r &= (125)(348796) \\ s &= (17825694)(3) \end{aligned}$$

Längderna av cyklerna ger permutationernas typ. Eftersom p har två cykler av längd 1, två cykler av längd 2 och en cykel av längd 3 har p typ $[1^2 2^2 3]$. Vidare har q och s typ $[1\,8]$ och r har typ $[3\,6]$.

För att få reda på tecket hos permutationerna kan vi använda oss av att cykler av udda längd är jämna permutationer och cykler av jämn längd är udda permutationer. Vi kan enkelt se detta genom att $(x_1 x_2 \cdots x_n) = (x_1 x_2)(x_2 x_3) \cdots (x_{n-1} x_n)$. Eftersom p har tre cykler av udda längd och två cykler av jämn längd måste tecket vara $(+1)^3(-1)^2 = +1$. Eftersom de tre övriga permutationerna har en cykel av udda längd och en av jämn längd är deras tecken $(+1)(-1) = -1$.

Eftersom permutationer är konjugerade om och endast om de har samma typ har vi att q och s är konjugerade medan inga andra par är konjugerade. För att finna en permutation τ sådan att $\tau^{-1} q \tau = s$, dvs $q\tau = \tau s$, måste vi avbilda cyklerna på varandra. Därför måste $\tau(3) = 1$ för att $\tau(s(3)) = \tau(3) = 1$ och $q(\tau(3)) = q(1) = 1$. Vidare måste vi avbilda 1 på något element i åttacykeln, säg $\tau(1) = 2$. Då måste

$$\begin{aligned} \tau(7) &= \tau(s(1)) = q(\tau(1)) = q(2) = 3, \\ \tau(8) &= \tau(s(7)) = q(\tau(7)) = q(3) = 5, \\ \tau(2) &= \tau(s(8)) = q(\tau(8)) = q(5) = 4, \\ \tau(5) &= \tau(s(2)) = q(\tau(2)) = q(4) = 6, \\ \tau(6) &= \tau(s(5)) = q(\tau(7)) = q(6) = 7, \\ \tau(9) &= \tau(s(6)) = q(\tau(6)) = q(7) = 9, \\ \tau(4) &= \tau(s(9)) = q(\tau(9)) = q(9) = 8. \end{aligned}$$

Om vi skriver τ på enradsnotation får vi $\tau = 241867359$, eller på cykelnotation $\tau = (12485673)(9)$.
Svar. Permutationerna p, q, r och s har typ $[1^2 2^2 3]$, $[1\,8]$, $[3\,6]$, respektive $[1\,8]$. Permutationen p är jämn medan de övriga är udda. Permutationerna q och s är konjugerade med $\tau^{-1} q \tau = s$ där $\tau = 241867359$ i enradsnotation.