Lösningsförlag till inlämningsuppgifter vecka 4

2002-11-24

Uppgift 1 Gruppen G med element $\{A, B, C, X, Y, Z\}$ har grupptabell

$*$	A	B	C	X	Y	Z
A	B	C	A	Y	Z	X
B	C	A	B	Z	X	Y
C	A	B	C	X	Y	Z
X	Z	Y	X	C	B	A
Y	X	Z	Y	A	C	B
Z	Y	X	Z	B	A	C

Bestäm en explicit isomorfi till den symmetriska gruppen på tre element.

Lösning: Eftersom det bara finns ett identitetselement i en grupp är det lätt att se vilket element i G som måste gå på identitetselementet i S_3. Det måste vara det element som uppfyller $e * x = x$ för alla x i G och enligt grupptabellen är $e = C$.

Eftersom en isomorfi bevarar ordningen av elementen måste det finnas två elemennt av ordning tre i G, som svarar mot permutationerna (123) och (132). vidare måste det finnas tre element av ordning två som svarar mot permutationerna (23), (13) och (12). Eftersom ett element av ordning två uppfyller $x * x = e$ måste det enligt grupptabellen vara X, Y och Z som har ordning två. Vidare måste A och B vara element av ordning två och vi kan verifiera att $A * A = B$, $A^3 = A * A * A = A * B = C$ och $B * B = A$, $B^3 = B * B * B = B * A = C$.

En isomorfi $\phi : G \longrightarrow S_3$ kan alltså fås genom att börja med att välja $\phi(C) = id$, $\phi(A) = (123)$. Därefter följer att $\phi(B) = \phi(A * A) = \phi(A) \circ \phi(A) = (123) \circ (123) = (132)$. Vidare måste vi ha att X går på en av transpositionerna, säg $\phi(X) = (12)$. Vi får då $\phi(Y) = \phi(A*X) = \phi(A)\circ\phi(X) = (123)\circ(12) = (13)$ och $\phi(Z) = \phi(B*X) = \phi(B)\circ\phi(X) = (132)\circ(12) = (23)$. Vi behöver i princip kontrollera att $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$ för alla par (x, y) i $G \times G$. Om vi däremot känner till att det bara finns två grupper av ordning sex, nämligen C_6 och S_3 behöver vi inte göra denna kontroll.

Vi kunde också valt $\phi(A) = (132)$ och $\phi(X) = (13)$ eller $\phi(X) = (23)$. Totalt ger detta sex olika möjligheter. Alla fungerar och de ger sex olika isomorfier från G till S_3.

Svar. Det finns sex möjliga isomorfier som ges av

	A	B	C	X	Y	Z
ϕ_1	(132)	(123)	id	(13)	(12)	(23)
ϕ_2	(132)	(123)	id	(12)	(23)	(13)
ϕ_3	(132)	(123)	id	(23)	(13)	(12)
ϕ_4	(123)	(132)	id	(12)	(13)	(23)
ϕ_5	(123)	(132)	id	(13)	(23)	(12)
ϕ_6	(123)	(132)	id	(23)	(12)	(13)