Lösningsförlag till inlämningsuppgifter vecka 5

2002-12-01

Uppgift 1 De fyra graferna G_1, G_2, G_3 och G_4 ges av nedanstående granntabeller. Avgör om några av dem är isomorfa med varandra.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	4	1	2	4	2	1	0
2	4	5	7	3	6	5	3	6	3
9	8	7	9	6	9	8	8	7	5

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	3	2	0	0	1	2	1	2
4	6	7	6	5	4	3	4	3	6
5	8	9	8	7	7	9	5	9	8

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	5	3	0	2	0	1	0	6	1
5	6	4	2	5	1	3	4	7	2
7	9	9	6	7	4	8	8	9	8

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	4	1	0	0	2	3	1	3
4	3	5	7	2	2	7	6	7	6
5	8	6	9	5	4	9	8	9	8

Lösning: Eftersom alla fyra grafer har lika många hörn och alla hörn hara valens tre kan vi inte avgöra eventuell isomorfi med hjälp av antal hörn eller hörnens valens. Däremot kan vi se på cykler av olika längder. Vi börjar med att leta efter cykler av längd tre.

För att det skall finnas en cykel av längd tre i en graf kan vi gå igenom alla kanter och se ifall ändpunkterna i något fall har en gemensam granne. När vi går igenom de fyra graferna på detta sätt finner vi att G_1 och G_3 saknar cykler av längd tre medan G_2 har de två trecyklerna 045 och 457 och G_4 har de två trecyklerna 045 och 245.

Vi behöver nu bara fortsätta jämföra G_1 med G_3 och G_2 med G_4.

I G_1 och G_3 fortsätter vi med att räkna fyrcykler. Det kan vi göra genom tt gå igenom alla par av kolonner och se om samma par av hörn finns med i något sådant par. På så sätt finner vi att det finns två fyrcykler, 1468 och 0259 i G_1 och två fyrcykler, 1689 och 0547 i G_3. Vi börjar misstänka att de kanske är isomorfa och försöker se hur de två disjunkta fyrcyklerna hänger ihop. Vi ser då i G_1 att man kan gå från den första cykeln till den andra via kanterna 01 och 56, eller via stigen 278 eller 934. På motsvarande sätt kan man i G_3 komma från den första till den andra genom kanterna 15 och 87 eller via stigarna 630 och 924. Därför kan vi börja gissa på en isomorfi genom följande

$$\begin{array}{c|cccccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \phi & 1 & 5 & 9 & 3 & 0 & 8 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{array}$$

Om vi skriver om den tabellen för G_1 enligt detta får vi

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 3 & 6 & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 6 & 9 & 8 & 8 & 7 & 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccccccccc} 1 & 5 & 9 & 3 & 0 & 8 & 7 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 5 & 1 & 1 & 0 & 5 & 9 & 0 & 9 & 5 & 1 \\ 9 & 0 & 8 & 2 & 3 & 7 & 8 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 6 & 7 & 6 & 4 & 4 & 2 & 8 \end{array}$$

som efter sortering är lika med granntabellen för G_3. Alltså är G_1 och G_3 isomorfa.

Även G_2 och G_4 har vissa likheter. Vi har redan sett att båda har två trecykler med en gemensam kant. Vid en isomorfi måste denna konstellation bevaras och vi kan börja med att gissa $\phi(0) = 0$, $\phi(4) = 4$, $\phi(5) = 5$ och $\phi(7) = 2$. Då måste också $\phi(1) = 1$ och $\phi(2) = 6$, eftersom 1 är enda grannen förutom 4 och 5 till 0 i G_2, och motsvarande för 1 i G_4. Sedan måste 6 och 8 avbildas på 3 och 8, eftersom detta är grannarna till 1 i G_2 respektive G_4. På samma sätt måste 3 och 9 avbildas på 7 och 9. Vi får då bijektionen ϕ som

$$\begin{array}{c|cccccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \phi & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 3 & 2 & 8 & 9 \end{array}$$

och

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 4 & 3 & 6 \\ 5 & 8 & 9 & 8 & 7 & 7 & 9 & 5 & 9 & 8 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 3 & 2 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 5 & 4 & 7 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & 9 & 8 & 2 & 2 & 9 & 5 & 9 & 8 \end{array}$$

vilket efter sortering är granntabellen för G_4. Alltså är G_2 och G_4 isomorfa.

Svar. Den första och den tredje är isomorfa och den andra och den fjärde är isomorfa.