Institutionen för matematik, **KTH**
Mats Boij

Lösningsförslag till
Tentamen i 5B1118 Diskret matematik 5p
20 december, 2000

1) Beräkna $x^4 + 2x^3 + 3$ för alla värden på x i $\mathbf{Z}_5$. **(3p)**

Lösning: Det finns bara fem värden för x i $\mathbf{Z}_5$. Vi sätter in dessa i $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3$ och får

$$\begin{aligned}
p(0) &= 0^4 + 2 \cdot 0^3 + 3 = 0 + 2 \cdot 0 + 3 = 3 \\
p(1) &= 1^4 + 2 \cdot 1^3 + 3 = 1 + 2 \cdot 1 + 3 = 6 = 1 \\
p(2) &= 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 3 = 16 + 2 \cdot 8 + 3 = 1 + 2 \cdot 3 + 3 = 10 = 0 \\
p(3) &= p(-2) = (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 + 3 = 16 - 2 \cdot 8 + 3 = 1 - 2 \cdot 3 + 3 = 3 \\
p(4) &= p(-1) = (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^{-3} + 3 = 1 - 2 \cdot 1 + 3 = 2
\end{aligned}$$

där alla räkningar är gjorda i $\mathbf{Z}_5$. Vi kan också använda oss av Fermats lilla sats för att se att $x^4 + 2x^3 + 3 = 1 + 2x^3 + 3 = 2x^3 + 4$ för $x \neq 0$ i $\mathbf{Z}_5$.

2) Bestäm alla positiva heltalslösningar till ekvationen

$$9x + 12y = 57.$$

(3p)

Lösning: Med hjälp av Euklides algoritm kan vi finna a och b så att $9a + 12b = \mathrm{sgd}(9, 12) = 3$;

$$\begin{aligned}
12 &= 1 \cdot 9 + 3 \\
9 &= 3 \cdot 3 + 0
\end{aligned}$$

och $3 = 1 \cdot 12 + (-1) \cdot 9$. Alltså är $(a, b) = (-1, 1)$ en lösning till ekvationen $9a + 12b = 3$, och eftersom $57 = 19 \cdot 3$ kan få en heltalslösning till den givna ekvationen genom $(x, y) = (19a, 19b) = (-19, 19)$. Om vi delar båda sidor av ekvationen med tre får vi $3x + 4y = 19$. Eftersom $\mathrm{sgd}(3, 4) = 1$ får vi att alla andra heltalslösningar till ekvationen ges av $(x, y) = (-19 + 4k, 19 - 3k)$ för något heltal k. Om lösningen dessutom skall vara positiv krävs att $-19 + 4k > 0$ och $19 - 3k > 0$, dvs $19/4 < k < 19/3$. Detta ger möjligheterna $k = 5$ och $k = 6$, vilket i sin tur ger de positiva lösningarna: $(x, y) = (1, 4)$ och $(x, y) = (5, 1)$.

Svar: De positiva heltalslösningarna till ekvationen ges av $(x, y) = (1, 4)$ och $(x, y) = (5, 1)$.

3) Ett barn har fem gula klossar, tre blå klossar och fyra röda klossar. Hur många olika torn kan barnet bygga genom att stapla alla klossar på varandra? **(3p)**

Lösning: Det är sammanlagt tolv klossar och om barnet staplar alla klossar på varandra får vi alltid tolv klossar på höjden. Om vi utgår från att det bara är färgen som skiljer klossarna från varandra är det nu frågan om att lägga tolv bollar i tre lådor; låda gul, låda blå och låda röd så att det hamnar fem bollar i den första, tre i den andra och fyra i den tredje. Antalet sätt att göra detta ges av multinomialtalet

$$\binom{12}{5,3,4} = \frac{12!}{5!3!4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 24} = 11 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 27720.$$

Svar: Barnet kan bygga 27720 olika torn.

4) Den linjära kod som har paritetskontrollmatris

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rättar ett fel. Vilket ord har skickats om det uppstått ett fel och det mottagna ordet är 110011? **(3p)**

Lösning: Om vi utför paritetskontrollen som matrisen svara mot får vi i första raden $1{\cdot}1{+}0{\cdot}1{+}1{\cdot}0{+}1{\cdot}0{+}1{\cdot}1{+}0{\cdot}1 = 1{+}1 = 0$, i andra raden $1{\cdot}1{+}1{\cdot}1{+}0{\cdot}0{+}1{\cdot}0{+}0{\cdot}1{+}1{\cdot}1 = 1+1+1 = 1$ och i tredje raden $0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$. Alltså blev resultatet lika med den andra kolonnen, $(0, 1, 1)$, vilket betyder att om det bara gjorts ett fel, måste det ha varit i andra positionen. Det kodord som sändes var därför 100011.

Svar: Det kodord som sändes var 100011.

5) Avgör om graferna som ges av följande granntabeller är isomorfa.

1	2	3	4	5	6
4	4	4	1	2	1
6	5	5	2	3	2
	6	6	3		3

1	2	3	4	5	6
4	3	2	1	2	1
6	4	5	2	3	4
	5		6	6	5

(3p)

Lösning: De två graferna är inte isomorfa. Det finns många sätt att se detta. Vi kan se att den första grafen är bipartit eftersom hörn 1, 2 och 3 bara har kanter till hörnen 4, 5 och 6, och tvärtom. Den andra grafen kan inte vara bipartit eftersom den innehåller en trecykel, 1, 4, 6.

Svar: De är inte isomorfa.

6) Om man slår med en tärning finns sex olika utfall. Om man slår med två likadana tärningar finns 21 olika utfall. Hur många olika utfall finns det om man slår med fyra likadana tärningar? **(4p)**

Lösning: Eftersom det inte spelar någon roll vilken av tärningarna som tar vilket värde rör det sig om ett oordnat val. Eftersom flera tärningar kan få samma värde är det val med återläggning. Vi skall göra ett oordnat val av 4 element ur en mängd med 6 element. Ett oordnat val med återläggning av k element ur en mängd med n element kan göras på

$$\binom{n+k-1}{k}$$

sätt. I detta fall blir det

$$\binom{6+4-1}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126$$

olika utfall.

Svar: Det finns 126 olika utfall vid slag av fyra likadana tärningar.

7) Skriv polynomet $x^3 + x + 2$ som en produkt av irreducibla polynom i $\mathbf{Z}_3[x]$. **(4p)**

Lösning: Eftersom polynomet har grad tre är det antingen irreducibelt, eller har minst en faktor av grad ett. Enligt faktorsatsen är en faktor av grad ett samma sak som ett nollställe, och vi kan pröva de tre värdena på x i $\mathbf{Z}_3$ för att se om det finns något nollställe. Med $x = 0$ får vi $x^3 + x + 2 = 0 + 0 + 2 = 2$, för $x = 1$ får vi $x^3 + x + 2 = 1 + 1 + 2 = 1$, och för $x = 2$ får vi $x^3 + x + 2 = 2 + 2 + 2 = 0$. Alltså finns bara ett nollställe, och $(x - 2) = (x + 1)$ är den enda irreducibla faktorn av grad ett. Nu kan vi dela med $x + 1$ och får

Nu måste $x^2 + 2x + 2$ vara irreducibelt eftersom den enda möjliga faktorn av grad ett är $x + 1$ och $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Vi har därför att $x^3 + x + 2 = (x + 1)(x^2 + 2x + 2)$ är en faktorisering i irreducibla faktorer.

$$
\begin{array}{r|llll}
 & & x^2 & +2x & +2 \\ \hline
x+1 & x^3 & & +x & +2 \\
 & x^3 & +x^2 & & \\ \hline
 & & 2x^2 & +x & +2 \\
 & & 2x^2 & +2x & \\ \hline
 & & & 2x & +2 \\
 & & & 2x & +2 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

Svar: $x^3 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 2x + 2)$ är en faktorisering i irreducibla faktorer.

8) Visa att en kantfärgning av en bipartit graf med k färger är ekvivalent med k parvis disjunkta matchningar och använd detta för att visa att en regulär bipartit graf har en fullständig matchning. **(4p)**

Lösning: En kantfärgning med k färger är ett sätt att dela in kanterna i k parvis disjunkta ordnade delmängder så att inte två kanter som har ett gemensamt hörn ligger i samma del.

En matchning är en delmängd av kanterna sådan att inga två kanter i den har ett gemensamt hörn.

Alltså måste varje färg i en kantfärgning vara en matchning. Å andra sidan ger också k parvis disjunkta matchningar en kantfärgning genom att varje matchning svarar mot en färg.

Vi skall nu visa att varje regulär bipartit graf har en fullständig matchning. Eftersom en regulär bipartit graf av valens k går att kantfärga med k färger enligt sats i kursboken. Alltså kan vi använda en av delarna i denna för att få en matchning. Att matchningen måste vara fullständig beror på att alla hörn har valens k och därför måste alla färger användas vid kantfärgning av kanterna från varje hörn. Alltså kommer varje hörn att finnas med som ändpunkt i någon kant i matchningen, som därför är fullständig.

9) Använd genererande funktioner för att bestämma lösningen till rekursionen $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, och

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n,$$

för $n \geq 2$. **(4p)**

Lösning: Vi skriver den genererande funktionen som $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

och ser att vi kan multiplicera med polynomet $1 - 3x + 2x^2$ för att få

$$(1 - 3x + 2x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + (a_1 - 3a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n$$

vilket med $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ ger

$$(1 - 3x + 2x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - x + \frac{4x^2}{1 - 2x}$$

och

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1 - x}{1 - 3x + 2x^2} + \frac{4x^2}{(1 - 2x)(1 - 3x + 2x^2)}$$

Eftersom $1 - 3x + 2x^2 = (1 - x)(1 - 2x)$ får vi att

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1 - 2x} + \frac{4x^2}{(1 - 2x)^2(1 - x)}$$

Den andra av dessa termer skriver vi med hjälp av partialbråk

$$\frac{4x^2}{(1-2x)^2(1-x)} = \frac{A}{(1-2x)^2} + \frac{B}{(1-2x)} + \frac{C}{(1-x)}$$

Om vi multiplicerar med nämnaren får vi

$$4x^2 = A(1-x) + B(1-x)(1-2x) + C(1-2x)^2$$

och sätter vi in $x = 1$ och $x = 1/2$, får vi $4 = C$ respektive $1 = A/2$, så $A = 2$ och $C = 4$. Med $x = 0$ får vi $0 = A + B + C$, vilket ger $B = -6$. Till slut har vi kommit fram till att

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-2x} + \frac{2}{(1-2x)^2} - \frac{6}{(1-2x)} + \frac{4}{(1-x)}$$

Alltså ges a_n av

$$a_n = 2^n + 2(n+1)2^n - 6 \cdot 2^n + 4 = (2n-3)2^n + 4.$$

Svar: Talföljden ges av $a_n = (2n-3)2^n + 4$, för alla $n \geq 0$.

10) Låt a vara rotation av planet med ett femtedels varv medsols kring origo och låt b vara spegling i en linje genom origo. Visa att mängden

$$G = \{id, a, a^2, a^3, a^4, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b\}$$

bildar en grupp under sammansättning och att $a^k b = ba^{-k}$ för varje heltal k. **(4p)**

Lösning: Eftersom a är rotation en femtedels varv kommer $a^5 = id$ och eftersom b är en spegling gäller att $b^2 = id$. Bilda en regelbunden femhörning i planet med centrum i origo och med ett hörn på linjen i vilken b speglar. Vi får då att både a och b avbildar denna femhörning på sig själv. Alltså ligger både a och b i symmetrigruppen för femhörningen. Utöver identitetsavbildningen finns det fyra rotationer och fem speglingar som avbildar femhörningen på sig själv. Rotationerna ges av a, a^2, a^3 och a^4, eftersom dessa svarar mot rotation en femtedels varv, två femtedels varv, tre femtedels varv och fyra femtedels varv medsols.

Eftersom b inte är någon potens av a måste b, ab, a^2b, a^3b och a^4b vara fem andra element, och därmed måste det vara de fem speglingarna. Alltså består mängden G av alla symmetrier av femhörningen och därmed är det en grupp under sammansättning.

Sammansättningen av en spegling med sig själv är identiteten, varför $a^k b = (a^k b)^{-1}$, och därmed också $a^k b = b^{-1}a^{-k} = ba^{-k}$, för alla heltal k.