

Tentamen i 5B1118 Diskret matematik 5p
20 december, 2001

Skrivtid: 14.00-19.00

Inga hjälpmedel tillåtna.

För godkänt = betyg 3 fordras minst 16 poäng, för betyg 4 minst 22 poäng och för betyg 5 minst 30 poäng. De som har godkänt från inlämningsuppgifterna får tillgodoräkna sig motsvarande uppgift med 3 poäng. Ange de uppgifter du får tillgodoräkna dig med ett G på övre delen av skrivningsomslaget. Det maximala antalet poäng är angivet inom parentes vid varje uppgift.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl!

- 1) Låt $M = \{0, 1, 2, \dots, 99\}$ och definiera en funktion $f : M \rightarrow M$ genom att låta $f(x)$ vara resten vid division av $3x + 5$ med 100. Avgör om f är injektiv, surjektiv eller bijektiv. **(3p)**
- 2) När man spelar *Bridge* tilldelas varje spelare 13 kort. Antag att en spelare fått 5 hjärter, 3 ruter, 2 klöver och 3 spader. På hur många sätt kan dessa kort sorteras så att varje färg ligger samlad, dvs alla hjärter ligger i följd, etc? Hur många sätt finns det om en spelare har h hjärter, r ruter, k klöver och s spader? **(3p)**
- 3) Sex bollar läggs slumpmässigt i fyra lådor. Är sannolikheten att ingen låda blir tom större eller mindre än 0,4? **(3p)**
- 4) Bestäm polynom $\lambda(x)$ och $\mu(x)$ i $\mathbf{Z}_3[x]$ sådana att

$$\mu(x)(x^3 + x^2 + 1) + \lambda(x)(x^2 + 2x + 2) = 1.$$

(3p)

- 5) Bestäm det kromatiska talet för grafen G som ges av följande granntabell

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	1	5	4	1	1	4	2	2
6	9	6	8	7	2	5	5	7	3
7	10	10		8	3	6			
					7	9			

(3p)

- 6) Vilka av följande mängder av permutationer är delgrupper till S_5 ? Är några av delgrupperna isomorfa med varandra? Permutationerna är skrivna på enradsnotation.

$$A = \{12345, 14253, 15432, 13524\}$$

$$B = \{12345, 53142, 31542, 21543\}$$

$$C = \{15342, 42315, 45312, 12345\}$$

$$D = \{45321, 54312, 12345, 21354\}$$

(4p)

- 7) Hur många nollor avslutar talet 2001! om det skrivs hexadecimalt? (Observera att 2001 är skrivet decimalt.)

(4p)

- 8) I nedanstående tabell anges antalet grafer med 6 hörn och k kanter. Man lägger märke till att följderna är symmetriska — exempelvis finns lika många grafer med 0 kanter som med 15 kanter. Förklara varför.

#kanter	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
#grafer	1	1	2	5	9	15	21	24	24	21	15	9	5	2	1	1

(4p)

- 9) Formulera vad som menas med en isomorfi av booleska algebror och ge en explicit isomorfi mellan algebran av delmängder till $\{1, 2, 3, 4\}$ och algebran av booleska funktioner i två variabler.

(4p)

- 10) I föredraget om bioinformatik under kursens sista vecka angavs en formel för antalet inversioner som krävdes för att sortera en tecknad permutation π med n element. Avståndet var i stort sett $n - c(\pi)$, där $c(\pi)$ är antalet cykler i brytpunktsgraferna till π , inklusive de korta cyklerna av längd 1.

Ett liknande samband gäller för vanliga permutationer. Låt $d(\pi)$ vara antalet transpositioner som krävs för att sortera $\pi \in S_n$. Alternativt kan vi säga att $d(\pi)$ är det minsta antal transpositioner som krävs för att skriva π . Visa att $d(\pi) = n - c(\pi)$, där $c(\pi)$ är antalet cykler som permutationen π har då den skrivs med cykelnotation. (Observera att med transpositioner avses här tvåcykler, det vill säga helt enligt definitionen i kursboken.)

(4p)