5B1200 Differentialekvationer och transformer I för D2

Problemdemonstration 22 april, 2002

Övning 1 (ZC8.2.2) *Bestäm den allmänna lösningen till systemet*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

Lösning: Vi skriver först systemet på matrisform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

För att finna den allmänna lösningen behöver vi först bestämma egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen $\det(\lambda I - A) = 0$ ges av

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

Alltså är egenvärdena 1 och 4, och vi kan bestämma motsvarande egenvektorer

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2 & -2 & 0 \\ -1 & 1-3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket ger $k_1 = (2, -1)$ och

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4-2 & -2 & 0 \\ -1 & 4-3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

som ger $k_2 = (1, 1)$. Den allmänna lösningen kan nu skriva som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} 2c_1e^t + c_2e^{4t} \\ -c_1e^t + c_2e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Övning 2 (ZC8.2.20) *Bestäm den allmänna lösningen till systemet*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -6x &+ 5y \\ \frac{dy}{dt} &= -5x &+ 4y \end{cases}$$

Lösnining: Vi skriver först systemet på matrisform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

För att finna den allmänna lösningen behöver vi först bestämma egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen $\det(\lambda I - A) = 0$ ges av

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda + 6 & -5 \\ 5 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.$$

Alltså är egenvärdena 1 det enda egenvärdet och vi kan bestämma motsvarande egenvektorer

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1+6 & -5 & 0 \\ 5 & -1-4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -5 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket ger egenvektorn $k_1 = (1, 1)$. Eftersom -1 var ett upprepat egenvärde, men med bara en egenvektor får vi den allmänna lösningen som

$$c_1 k_1 e^{-t} + c_2(k_1 t + k_2)e^{-t}$$

där k_2 är en lösning till $(A - \lambda I)x = k_1$. (Se sid 382.)

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6+1 & 5 & 0 \\ -5 & 4+1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 5 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

som exempelvis $k_2 = (-1/5, 0)$ är en lösning till detta system. Den allmänna lösningen kan nu skriva som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -1/5 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 te^{-t} - c_2 e^{-t}/5 \\ c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t} \end{pmatrix}.$$

Övning 3 (ZC8.2.36) *Bestäm den allmänna lösningen till systemet*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 4x &+ 5y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x &+ 6y \end{cases}$$

Lösnining: Vi skriver först systemet på matrisform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

För att finna den allmänna lösningen behöver vi först bestämma egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen $\det(\lambda I - A) = 0$ ges av

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda - 6 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 34 = (\lambda - 5 - 3i)(\lambda + 5 + 3i).$$

Alltså är egenvärdena $5 + 3i$ och $5 - 3i$, och vi kan bestämma motsvarande egenvektorer

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5+3i-4 & -5 & 0 \\ 2 & 5+3i-6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1+3i & -5 & 0 \\ 2 & -1+3i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1+3i & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket ger $k_1 = (5, 1 + 3i)$ och

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5-3i-4 & -5 & 0 \\ 2 & 5-3i-6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1-3i & -5 & 0 \\ 2 & -1-3i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1-3i & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

som ger $k_2 = (5, 1 - 3i)$. Vi får lösningar genom exempelvis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} e^{(5+3i)t} + ic_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{(5-3i)t}$$

Vi tar realdelen av detta, under förutsättning att c_1 och c_2 är reella, och får

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t - 3\sin 3t \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t + 3\cos 3t \end{pmatrix} e^{5t}$$

som den allmänna lösningen till systemet. Att de två lösningarna är linjärt oberoende kan vi se genom Wronskianen

$$\begin{vmatrix} 5\cos 3te^{5t} & 5\sin 3te^{5t} \\ \cos 3te^{5t} - 3\sin 3te^{5t} & \sin 3te^{5t} + 3\cos 3te^{5t} \end{vmatrix}$$

som är lika med

$$e^{10t}(15\cos^2 3t + 5\sin 3t\cos 3t + 15\sin^2 3t - 5\sin 3t\cos 3t) = 15e^{10t}.$$