

## 5B1200 Differentialekvationer och transformeringar I för D2

### Problemdemonstration 29 april, 2002

**Övning 1 (ZC10.1.6)** *Skriv om den icke-linjära differentialekvationen*

$$x'' + x - \epsilon x|x| = 0, \quad \epsilon > 0,$$

*som ett plant autonomt system och bestäm alla kritiska punkter.*

*Lösning:* För att få differentialekvationen till ett system får vi införa den nya beroende variabeln  $y(t) = x'(t)$ . Eftersom  $x''(t)$  då ersätts med  $y'(t)$  får vi det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \epsilon x|x| - x \end{cases}$$

För att finna de kritiska punkterna för systemet behöver vi finna skärningspunkterna mellan de två kurvorna  $y = 0$  och  $\epsilon x|x| - x = 0$ . Den senare består av de tre parallella linjerna  $x = 0$ ,  $x = 1/\epsilon$  och  $x = -1/\epsilon$ . Alltså finns det tre kritiska punkter  $(x, y) = (-1/\epsilon, 0)$ ,  $(x, y) = (0, 0)$  och  $(x, y) = (1/\epsilon, 0)$ .

**Övning 2 (ZC10.1.24)** Lös det icke-linjära autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = y + x(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

genom att övergå till polära koordinater och beskriv det geometriska uppförandet av lösningen med begynnelsevärden  $x(0) = 4$ ,  $y(0) = 0$ .

Lösning: När vi använder polära koordinater har vi

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Genom att derivera detta får vi

$$\begin{cases} x' = r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta = r'(x/r) - \theta'y \\ y' = r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta = r'(y/r) + \theta'x \end{cases}$$

och löser vi ut  $r'$  och  $\theta'$  ur detta får vi

$$\begin{cases} r' = (xx' + yy')/r \\ \theta' = (-yx' + xy')/r^2 \end{cases}$$

I vårt fall får vi att

$$\begin{cases} r' = (x(y + x(x^2 + y^2)) + y(-x + y(x^2 + y^2)))/r = (x^2 + y^2)^2/r = r^3 \\ \theta' = (-yx' + xy')/r^2 = (-y(y + x(x^2 + y^2)) + x(-x + y(x^2 + y^2)))/r^2 \\ = -(x^2 + y^2)/r^2 = -1 \end{cases}$$

Den första av dessa ordinära differentialekvationer kan vi lösa genom separation av variabler, och vi får

$$\frac{dr}{r^3} = dt$$

vilket efter integration övergår i

$$-\frac{1}{2r^2} = t - \frac{1}{2r_0^2}$$

dvs

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1 - 2tr_0^2}}$$

Den andra integreras direkt till

$$\theta(t) = \theta_0 - t$$

Med begynnelsevärde  $(x, y) = (4, 0)$  får vi  $r_0 = 4$  och  $\theta_0 = 0$ . Vi ser nu att  $r$  går mot oändligheten när  $t$  går mot  $1/2r_0^2 = 1/32$ . Alltså kommer lösningen snabbt att närma sig linjen  $\theta = -1/32$  uppifrån.

**Övning 3 (ZC10.3.18)** Klassificera om möjligt alla kritiska punkter till systemet

$$\begin{cases} x' &= x(1 - x^2 - 3y^2) \\ y' &= y(3 - x^2 - 3y^2) \end{cases}$$

*Lösning:* För att finna de kritiska punkterna behöver vi finna skärningspunkterna mellan kurvorna  $x(1 - x^2 - 3y^2) = 0$  och  $y(3 - x^2 - 3y^2) = 0$ . Den första kurvan är unionen av linjen  $x = 0$  med ellipsen med halvaxlar 1 och  $1/\sqrt{3}$ . Den andra är unionen av linjen  $y = 0$  med ellipsen med halvaxlar  $\sqrt{3}$  och 1. Eftersom ellipserna inte skär varandra kommer skärningarna bli  $(x, y) = (0, \pm 1)$ , som är skärningarna mellan den första linjen och den andra ellipsen,  $(x, y) = (\pm 1, 0)$ , som är skärningen mellan den andra linjen och den första ellipsen, samt origo  $(x, y) = (0, 0)$ .

Vi bestämmer nu det allmänna uttrycket för Jacobianen av funktionen

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix}$$

genom

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ -2xy & 3 - x^2 - 9y^2 \end{pmatrix}$$

När vi sätter in de fem olika kritiska punkterna får vi

$$J(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 1 - 3(0)^2 - 3(\pm 1)^2 & -6(0)(\pm 1) \\ -2(0)(\pm 1) & 3 - (0)^2 - 9(\pm 1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},$$

$$J(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 - 3(\pm 1)^2 - 3(0)^2 & -6(\pm 1)(0) \\ -2(\pm 1)(0) & 3 - (\pm 1)^2 - 9(0)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

och

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 - 3(0)^2 - 3(0)^2 & -6(0)(0) \\ -2(0)(0) & 3 - (0)^2 - 9(0)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vi ser därmed att  $(x, y) = (0, \pm 1)$  är stabila noder, eftersom båda egenvärdena är negativa, och att  $(x, y) = (0, 0)$  är en instabil nod, eftersom båda egenvärdena är positiva. De kritiska punkterna  $(x, y) = (\pm 1, 0)$  är sadelpunkter eftersom egenvärdena har olika tecken.

Man kan i det här fallet få en viss inblick i lösningarnas struktur genom att byta till polära koordinater. Vi får, efter en del räkningar, att

$$\begin{cases} r' &= (1 - r^2)r(2 - \cos 2\theta) \\ \theta' &= \sin 2\theta \end{cases}$$

Alltså kommer cirkeln  $r = 1$  att vara en lösningskurva.