

5B1200 Differentialekvationer och transformeringar I för D2

Problemdemonstration 6 maj, 2002

Övning 1 (ZC11.1.9) Visa att mängden $\{\sin nx\}$, $n > 0$, bildar är ortogonal på intervallet $[0, \pi]$.

Lösning: Vi behöver visa att $(\sin nx, \sin mx) = 0$ om $m \neq n$. För att beräkna

$$(\sin mx, \sin mx) = \int_0^\pi \sin mx \sin nx dx$$

kan vi använda formel 224 på sidan 165 i Beta. Vi får då för $m \neq n$ att

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = \left[\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \right]_0^\pi = 0$$

eftersom $\sin k\pi = 0$ för alla heltal k . Formeln kan härledas genom additionssatsen för cosinus som ger

$$\begin{aligned} \cos(m+n)x &= \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx \\ \cos(m-n)x &= \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx \end{aligned}$$

och skillnaden mellan dessa ger

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} \cos(m-n)x - \frac{1}{2} \cos(m+n)x.$$

Vi får Formel 224 genom att integrera detta.

Övning 2 (ZC11.2.7+19) Bestäm fourierserien för funktionen

$$f(x) = \pi + x, \quad -\pi < x < \pi$$

och använd resultatet för att visa att

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Lösning: För forierserien kan vi använda formel (12) på sidan 310 i Beta med $L = \pi$ eftersom det svarar mot funktionen som är $g(x) = x$, $-\pi < x < \pi$. För $f(x) = \pi + x$ får vi därmed fourierserien

$$\pi + \frac{2\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{\pi} = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx.$$

Vi ska nu försöka använda denna serie för att summera

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Eftersom det är en alternerande serie med avtagande termer vet vi att den konvergerar. Vi kan nu jämföra den med vår givna fourierserie

$$\pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx$$

och ser då att vi skulle kunna få något liknande genom att använda fourierserien för beräkna $f(\pi/2)$, eftersom $\sin n\pi/2 = 0$ för jämna n och $\sin(2k+1)\pi/2 = (-1)^k$. Genom att sätta in $x = \pi/2$ i fourierserien för $f(x)$ får vi alltså

$$\pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin n\pi/2 = \pi + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{(2k+1)+1} \frac{1}{2k+1} (-1)^k$$

Om nu fourierserien konvergerar mot $f(\pi/2) = \pi + \pi/2 = 3\pi/2$ får vi

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{(2k+1)+1} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2} - \pi \right) = \frac{\pi}{4},$$

vilket skulle visas.

Det återstår att motivera att fourierserien verkligen konvergerar mot funktionsvärdet i punkten $x = \pi/2$. Detta kan vi se genom att använda Sats 11.1, eftersom f och f' är kontinuerliga i intervallet $(-\pi, \pi)$.

Om vi inte haft tillgång till formelsamling hade vi fått bestämma fourierkoefficienterna a_n och b_n genom integration. Efter att ha dragit bort konstantermen π får vi en udda funktion, och därför är alla $a_n = 0$ utom a_0 som är lika med π . För att få b_n använder vi formeln

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

och får

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} [(\pi + x)(-\cos nx)/n]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos nx)/n dx$$

genom partiell integration och eftersom $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$ för $n > 0$ får vi

$$b_n = \frac{(\pi + \pi)(-\cos n\pi)}{\pi n} - \frac{(\pi + (-\pi))(-\cos(-n\pi))}{\pi n} = -\frac{2 \cos n\pi}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Övning 3 (ZC11.3.42) Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = f(t)$$

där f är periodisk med period 1 och

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 1 - t, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

Lösning: Vi bestämmer en partikulärlösning $x_p(t)$ genom att ansätta en fourierserie

$$x_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n t + b_n \sin 2\pi n t).$$

När vi sätter in denna i differentialekvationen $m x'' + kx = f(t)$ får vi att $f(t)$ kan uttryckas med fourierserien

$$k a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((k - 4m\pi^2 n^2) a_n \cos 2\pi n t + (k - 4m\pi^2 n^2) b_n \sin 2\pi n t).$$

Vi kan också bestämma fourierserien för $f(t)$ genom att se i Beta på sidan 309. Formel (6) med $L = 1/2$ och $h = 1/2$ ger fourierserien för $1/2 - f(t)$ som

$$\frac{h}{2} + \frac{4h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{L} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)2\pi t.$$

och därmed är fourierserien för $f(t)$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)2\pi t = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)2\pi t.$$

Om vi nu jämför koefficienterna i de två serierna för $f(t)$ får vi att $k a_0 = 1/4$, $a_n = 0$ för udda n och $(k - 4m\pi^2(2n-1)^2) a_{2n-1} = -2/(\pi^2(2n-1)^2)$, för $k = 0, 1, 2, \dots$, och $b_n = 0$ för alla n . Alltså kan vi skriva vår partikulärlösning $x_p(t)$ som

$$x_p(t) = \frac{1}{4k} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(k - 4m\pi^2(2n-1)^2)} \cos(2n-1)2\pi t.$$

Denna lösning kan dock inte vara giltig om $k = 2m\pi^2(2n-1)^2$ för något heltal n . Problemet är då att vi har resonans och det kommer inte att finnas någon periodisk lösning till differentialekvationen.