LAPPSKRIVNING 4
5B1200, Diff & Trans I, VT02
Görs under RS 4, 2002–04–25
FÄRGAT PAPPER

Efternamn:	**Personnr**:
Namn:	**Intagningsår**:

Lösningen skrivs på detta papper. Tillåtna hjälpmedel: **BETA – Mathematics Handbook**.
Lösningsförslag kan kvitteras efter räknestugans slut. De rättade skrivningarna delas ut av läraren under nästa räknestuga. Betygskala: **0** till **3** poäng.
Överblivna lappskrivningar lämnas till studentexpeditionen.
Lappskrivningarna är frivilliga men kan sammanlagt ge maximalt 2 poäng till examinationen.

För matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ är känt att

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{samt att} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ange den allmänna lösningen till systemet $X' - AX = F$, där[1]

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad F = F(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[1] En påminnelse: inversen av en 2×2 icke-singulär matris ges av $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

LAPPSKRIVNING 4
5B1200, Diff & Trans I, VT02
Görs under RS 4, 2002–04–25
VITT PAPPER

Efternamn:	**Personnr**:
Namn:	**Intagningsår**:

Lösningen skrivs på detta papper. Tillåtna hjälpmedel: **BETA − Mathematics Handbook**.
Lösningsförslag kan kvitteras efter räknestugans slut. De rättade skrivningarna delas ut av läraren under nästa räknestuga. Betygskala: **0** till **3** poäng.
Överblivna lappskrivningar lämnas till studentexpeditionen.
Lappskrivningarna är frivilliga men kan sammanlagt ge maximalt 2 poäng till examinationen.

För matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ är känt att

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{samt att} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ange den allmänna lösningen till systemet $X' - AX = F$, där[1]

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad F = F(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

[1]En påminnelse: inversen av en 2×2 icke-singulär matris ges av $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Lösningsförslag till lappskrivning **4**, 2002–04–25, text på **FÄRGAT** papper:

Eftersom systemet är linjärt ges den allmänna lösningen av summan $X = X_h + Xp$ där X_h är allmänna lösningen till den homogena systemet $X' - AX = 0$ och X_p satisfierar $X' - AX = F$. Egenvärdena till matrisen A är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 3$ med respektive egenvektorer $v_1 = (1, -1)^T$ och $v_2 = (1, 1)^T$. Den allmänna lösningen till den homogena systemet ges av

$$X_h = c_1 e^{\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi C, \quad \text{med} \quad \Phi = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Med andra ord är $(\Phi C)' - A\Phi C = (\Phi' - A\Phi)C = \mathbf{0}$ för varje 2×1-vektor C, som medför att $\Phi' - A\Phi = 0$ (noll matrisen av ordning 2×2).
Antag nu att en lösning av det icke-homogena systemet kan fås på formen $X_p = \Phi U$, där $U = (u_1(t), u_2(t))^T$ är en kolumnvektor med obekanta funktioner som komponenter (variera konstanterna i den homogena lösningen). Då bör

$$F = X_p' - AX_p = \big(\Phi U\big)' - A\Phi U = \Phi' U + \Phi U' - A\Phi U = (\Phi' - A\Phi)U + \Phi U' = \Phi U'.$$

Därmed är

$$U' = \Phi^{-1} F = \frac{1}{2\,e^4} \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ e^t & e^t \end{pmatrix} F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

och

$$U = -\frac{e^{-3t}}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X_p = \Phi U = -\frac{e^{-3t}}{3} \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svar: $X = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter.

Lösningsförslag till lappskrivning **4**, 2002–04–25, text på **VITT** papper:

Eftersom systemet är linjärt … *titta på begynnelsestycket ovan* …

⋮

Därmed är

$$U' = \Phi^{-1} F = \frac{1}{2\,e^4} \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ e^t & e^t \end{pmatrix} F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

och

$$U = -e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X_p = \Phi U = -e^{-t} \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Svar: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter.