LAPPSKRIVNING 7
5B1200, Diff & Trans I, VT02

Görs under RS 7, 2002–05–16

FÄRGAT PAPPER

Efternamn:	**Personnr**:
Namn:	**Intagningsår**:

Lösningen skrivs på detta papper. Tillåtna hjälpmedel: **BETA − Mathematics Handbook**.

Lösningsförslag kan kvitteras efter räknestugans slut. De rättade skrivningarna delas ut av läraren under nästa räknestuga. Betygskala: **0** till **3** poäng.

Överblivna lappskrivningar lämnas till studentexpeditionen.

Lappskrivningarna är frivilliga men kan sammanlagt ge maximalt 2 poäng till examinationen.

Ange en lösning $u(x,t)$ till värmeledningsekvationen

$$2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0,$$

som satisfierarar: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(3x). \end{cases}$

LAPPSKRIVNING 7
5B1200, Diff & Trans I, VT02
Görs under RS 7, 2002–05–16
VITT PAPPER

Efternamn:	**Personnr**:
Namn:	**Intagningsår**:

Lösningen skrivs på detta papper. Tillåtna hjälpmedel: **BETA – Mathematics Handbook**.

Lösningsförslag kan kvitteras efter räknestugans slut. De rättade skrivningarna delas ut av läraren under nästa räknestuga. Betygskala: **0** till **3** poäng.

Överblivna lappskrivningar lämnas till studentexpeditionen.

Lappskrivningarna är frivilliga men kan sammanlagt ge maximalt 2 poäng till examinationen.

Ange en lösning $u(x,t)$ till värmeledningsekvationen

$$3\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \;\; t > 0,$$

som satisfierarar: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(2x). \end{cases}$

Lösningsförslag till lappskrivning **7**, 2002–05–16, text på **FÄRGAT** papper:

Man söker lösningen på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i ekvationen ger

$$2\,X''T = XT' \quad\Longrightarrow\quad 2\,\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -2\lambda^2 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} X(x) &= \alpha\cos\lambda x + \beta\sin\lambda x, \\ T(t) &= \gamma\, e^{-2\lambda^2 t}. \end{cases}$$

Randvilkoren $u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0$ för varje t medför att $X'(0) = X'(\pi) = 0$, dvs

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = (\alpha\cos\lambda x + \beta\sin\lambda x)'_{x=0} = \beta \\ 0 = X'(\pi) = (\alpha\cos\lambda x)'_{x=\pi} = -\lambda\alpha\sin\lambda\pi \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots.$$

Med andra ord satisfierar var och en av funktionerna $u_n(x,t) = A_n\, e^{-2n^2 t}\cos nx$ både ekvationen och randvillkoren. I förhoppning att kunna uppfylla även begynnelsevilkoret använder man sig av superpositionsprincipen och komponerar lösningen u på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, e^{-2n^2 t}\cos nx.$$

Nu medför begynnelsevilkoret att

$$\cos 3x = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx \quad\Longrightarrow\quad A_n = \begin{cases} 1 & , n = 3, \\ 0 & , \text{annars.} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\textbf{Svar: } u(x,t) = e^{-18t}\cos 3x.}$$

Lösningsförslag till lappskrivning **7**, 2002–05–16, text på **VITT** papper:

Man söker lösningen på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i ekvationen ger

$$3\,X''T = XT' \quad\Longrightarrow\quad 3\,\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -3\lambda^2 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} X(x) &= \alpha\cos\lambda x + \beta\sin\lambda x, \\ T(t) &= \gamma\, e^{-3\lambda^2 t}. \end{cases}$$

Randvilkoren $u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0$ för varje t medför att $X'(0) = X'(\pi) = 0$, dvs

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = (\alpha\cos\lambda x + \beta\sin\lambda x)'_{x=0} = \beta \\ 0 = X'(\pi) = (\alpha\cos\lambda x)'_{x=\pi} = -\alpha\lambda\sin\lambda\pi \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots.$$

Med andra ord satisfierar var och en av funktionerna $u_n(x,t) = A_n\, e^{-3n^2 t}\cos nx$ både ekvationen och randvillkoren. I förhoppning att kunna uppfylla även begynnelsevilkoret använder man sig av superpositionsprincipen och komponerar lösningen u på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, e^{-3n^2 t}\cos nx.$$

Nu medför begynnelsevilkoret att

$$\cos 2x = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx \quad\Longrightarrow\quad A_n = \begin{cases} 1 & , n = 2, \\ 0 & , \text{annars.} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\textbf{Svar: } u(x,t) = e^{-12t}\cos 2x.}$$