

Institutionen för matematik, **KTH**
Mats Boij

Tentamen i 5B1200 Differentialekvationer och transformeringar I för D Modell

Skrivtid: 8.00-11.00

Tillåtna hjälpmedel: BETA — Mathematics Handbook.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Teoridelen ger tillsammans med bonuspoäng från inlämningsuppgifterna maximalt 6 poäng. Problemdelen ger tillsammans med bonuspoäng från grupparbeten och räknestugeuppgifter maximalt 12 poäng.

För godkänt krävs minst 9 poäng, för betyg 4 minst 12 poäng och för betyg 5 minst 15 poäng.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl!

Teoridel

1. Härled, utgående från definitionen, Laplacetransformen av den reella funktionen g som ges av

$$g(t) = f(t - a)U(t - a)$$

där U är Heavisides stegfunktion och f är en reell funktion med existerande Laplacetransform F . (3)

2. Förklara hur metoden med variation av parametrar fungerar för att finna en partikulärlösning till en andra ordningens linjär ordinär differentialekvation, dels allmänt, dels genom ett belysande exempel. (3)

Problemdel

3. En modell för en populationstillväxt ges av differentialekvationen

$$\frac{dP}{dt} = P(0.9 - 3.6 \cdot 10^{-7}P)$$

med begynnelsevärdet $P(0) = 2.4 \cdot 10^3$. Vilken är gränspopulationen,

$$P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t),$$

och vid vilken tidpunkt har populationen uppnått hälften av gränspopulationen? **(3)**

4. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x' = -7x + 25y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$$

och karakterisera den kritiska punkten. Hur kommer lösningarna att se ut efter lång tid? **(3)**

5. Bestäm alla lösningar på formen $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

i de fall där $R(r) = Cr^p$ för reella konstanter C och p . **(3)**

6. Betrakta differentialekvationen

$$y'' + 5y = f(x)$$

där f är periodisk med period 2π och ges av $f(x) = x$ i intervallet $(-\pi, \pi)$.

(a) Bestäm den allmänna lösningen.

(b) Visa att det finns en unik lösning med period 2π och bestäm $y(0)$ och $y'(0)$ för denna lösning.

(3)