Högre ordningens differentialekvationer

1 Introduktion och problemformulering

Inom den diskreta matematiken har man ofta en talföljd som är given rekursivt. Det kan vara svårt att beräkna ett analystiskt uttryck för talföljden, men en hjälp på vägen ges ofta av den genererande funktionen. Vi ska här se hur denna kan beräknas med hjälp av differentialekvationer. Dessa kommer att vara av ordning 2 och ha icke-konstanta koefficienter, vilket kräver metoder som inte behandlats tidigare i kursen.

De talföljder vi ska titta närmare på är

- $a_{n+1} = (1-n^2)a_n, \quad a_0 = 1$ och
- $a_{n+1} = (1-n^2)a_n + 3, \quad a_0 = 1.$

Eftersom koefficienten framför a_n beror av n är det i allmänhet svårt att se hur talföljderna beter sig. Vi tar då hjälp av något som kallas den **exponentiella genererande funktionen** för talföljden. Den ges av

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} = a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + \dots$$

Exempelvis ger $a_n = 1$ den exponentiella genererande funktionen

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Man kan ofta extrahera mycket information om talföljden ur dess genererande funktion.

2 Matematisk modell

Om man använder sig av ett rekursivt uttryck för en talföljd kan man skapa en ekvation som innehåller den genererande funktionen.

Exempel 2.1 *Betrakta talföljden som ges av*

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad f_0 = 0, f_1 = 1.$$

Detta är naturligtvis Fibonaccitalen. Vi tittar på dess exponentiella genererande *funktion:*

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+2} - f_{k+1}) \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+2} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1} \frac{x^k}{k!} \\
&= D^2 \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+2} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} - D \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= F''(x) - F'(x).
\end{aligned}$$

Löser man sedan differentialekvationen $F''(x) - F'(x) - F(x) = 0$ får man, med begynnelsevärdena $F(0) = a_0 = 0$ och $F'(0) = a_1 = 1$,

$$F(x) = \frac{\left(e^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}x} - e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}\right)}{\sqrt{5}}.$$

Det är inte alltid man får en differentialekvation, men i allmänhet blir det en sådan. Oftast är koefficienterna inte konstanta. Tittar vi på rekursionen $a_{n+1} = (1-n^2)a_n$ ger räkningar liknande dem ovan differentialekvationen

$$x^2y'' + (1+x)y' - y = 0,$$

där $y(x)$ är den genererande funktion vi är ute efter. För att lösa denna måste vi alltså ha en metod för att lösa icke-separabla differentialekvationer med icke-konstanta koefficienter.

3 Lösning av första problemet

Avsnitt 4.1 i boken säger att det finns lika många linjärt oberoende lösningar som den högsta graden i ekvationen. I vår ekvation har vi grad 2 (det finns en term y'', men ingen av högre ordning). Det finns alltså två lösningar till denna ekvation. Vi ska nu titta på en metod som givet en av dessa lösningar reducerar graden av ekvationen. Vi får då en förstagradsekvation, som vi kan lösa och därmed finna den fullständiga lösningen.

I ekvationen $x^2y'' + (1+x)y' - y = 0$ ser man tämligen lätt att $y_1(x) = 1 + x$ är en lösning till ekvationen. Vi ska nu använda denna lösning till att finns den andra lösningen.

Börja med att skriva om ekvationen på normalform, dvs så att koefficienten framför ledande termen är 1. Vi får

$$y'' + \frac{1+x}{x^2}y' - \frac{1}{x^2}y = 0,$$

eller mer allmänt

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Sedan ansätter vi att den andra lösningen ska vara på formen $y_2(x) = y_1(x)u(x)$, för någon funktion $u(x)$. Derivering och insättning ger

$$(y_1''u + 2y_1'u' + y_1u'') + P(x)(y_1'u + y_1u') + Q(x)y_1u = 0.$$

Vi skriver nu detta som en differentialekvation i $u(x)$:

$$y_1 u'' + (2y_1' + P(x)y_1)u' + (y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1)u = 0.$$

Vi ser nu fördelen med den ansats vi gjort. Den sista termen i vänsterledet, $(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1)u$ blir 0, eftersom y_1 uppfyller ekvationen $(y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. Vi ska nu lösa $y_1 u'' + (2y_1' + P(x)y_1)u' = 0$ eller $y_1 w' + (2y_1' + P(x)y_1)w = 0$ (sätt $u' = w$). I vårt fall blir detta $(1+x)w' + (2 + \frac{(1+x)^2}{x^2})w = 0$.

Denna ekvation är separabel. Vi får

$$\frac{dw}{w} = -\left(\frac{2}{1+x} + \frac{1+x}{x^2}\right) dx.$$

Integreras detta så fås

$$\ln w = -\ln(1+x)^2 + \frac{1}{x^2} - \ln x,$$

vilket ger

$$u' = w = \frac{e^{1/x}}{x(1+x)^2}.$$

Denna funktion ser hemsk ut, men går faktiskt att integrera. Man får då

$$u = \frac{-xe^{1/x}}{1+x},$$

vilket ger att den andra lösningen till den ursprungliga differetialekvationen blir

$$y_2(x) = y_1(x)u(x) = (1+x)\frac{-xe^{1/x}}{1+x} = -xe^{1/x}.$$

Totalt fås således lösningen $y = Ay_1(x) + By_2(x)$, där A och B är konstanter som kan bestämmas med hjälp av randvärden. I detta fall känner vi $y(0) = 1$. Eftersom $y_2(0)$ inte är definierad sätter vi $B = 0$. Vi sätter sedan $A = 1$, vilket ger lösningen

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x_k}{k!} = 1 + x,$$

så i detta fall hade vi $a_0 = a_1 = 1$, $a_i = 0$ för $i \geq 2$. Detta hade givetvis kunnat bestämmas utan den genererande funktionen, men de flesta talföljder är inte så enkla som denna.

4 Lösning av andra problemet

Vi tittar nu litet närmare på rekursionen $a_{n+1} = (1 - n^2)a_n + 3$. Denna ger upphov till differentialekvationen

$$x^2 y'' + (1+x)y' - y = -3e^x,$$

vilket är en inhomogen ekvation. Som vanligt kan vi lösa den homogena och inhomogena delen var för sig, och den homogena har vi redan löst ovan. Lösningarna var $y_1(x) = 1 + x$ och $y_2(x) = -xe^{1/x}$. Vi ska nu använda dessa för att finna en partikulärlösning.

Vi gör nu ansatsen $y_p(x) = u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$. Precis som tidigare försvinner många termer om vi sätter in detta i diffekvationen, eftersom vi använder lösningar till den homogena delen. Om man sätter in och räknar på får man, allmänt sett,

$$\frac{d}{dx}(y_1u_1' + y_2u_2') + P(x)(y_1u_1' + y_2u_2') + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x),$$

där $f(x)$ är högerledet i vår diffekvation. Ett sätt att få detta att stämma är att finna u_1, u_2 så att

$$\begin{aligned} y_1u_1' + y_2u_2' &= 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och två obekanta. Vi kan använda linjär algebra för att lösa detta. Sätt $\overline{u} = (u_1',\ u_2')$, $\overline{b} = (0,\ f(x))$ och

$$W = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}.$$

Determinanten av denna matris kallas **Wronskianen** av y_1 och y_2. Vi har då $W\overline{u} = \overline{b}$, som har lösning $\overline{u} = W^{-1}\overline{b}$. Vi får

$$u_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{|W|}, \qquad u_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{|W|}.$$

I vårt fall har vi $y_1(x) = 1 + x$, $y_2(x) = -xe^{1/x}$ och $f(x) = -3e^x$. Sätter vi in detta får vi $|W| = \frac{e^{1/x}}{x}$, vilket ger $u_1'(x) = -3x^2e^x$ och $u_2'(x) = -3xe^{x-1/x}(1+x)$. Vi kan integrera den första ekvationen, vilket ger $u_1(x) = -3(x^2 - 2x + 2)e^x$, men på den andra går vi dessvärre bet. Detta får illustrera svårigheterna med dessa metoder. Det går alltid att ställa upp en modell för hur man ska lösa diffekvationen, men det är inte alltid som man klarar integralerna. Metoden fungerar alltså inte perfekt jämt.