1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x\ \arctan(2x) - \ln(1+4x^2)}{x - 1 + e^{-x}} = \{\text{ typ } 0/0, \text{ L'Hospital}\} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\ \arctan(2x) + \dfrac{8x}{1+4x^2} - \dfrac{8x}{1+4x^2}}{1 - e^{-x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\ \arctan(2x)}{1 - e^{-x}} = \{\text{ typ } 0/0, \text{ L'Hospital }\} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{8}{1+4x^2}}{e^{-x}} = 8.$ **Svar:** 8.

---

2. Implicit derivering av $xy^3 + 4x^3y = 16$ ger $y^3 + 3xy^2y' + 12x^2y + 4x^3y' = 0$. För $x = 1$ och $y = 2$ fås $16y' + 32 = 0$ dvs $y'(2) = -2$. Tangenten ges av $\dfrac{y-2}{x-1} = -2$, dvs $2x + y = 4$.

Svar: $2x + y = 4$.

---

3. Vi har $\dfrac{3x^2 + 5x - 6}{x^3 - x^2} = \dfrac{3x^2 + 5x - 6}{x^2(x-1)} = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x-1}$. Med ”handpåläggning” får man $a = 6$ och $c = 2$. För $x = -1$ får man sedan $4 = 5 - b$, dvs $b = 1$. Alltså

$$\int_2^3 \frac{3x^2 + 5x - 6}{x^3 - x^2}\,dx = \int_2^3 \frac{6}{x^2}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{2}{x-1}\,dx = \Big[-\frac{6}{x}\Big]_2^3 + \Big[\ln|x|\Big]_2^3 + \Big[2\ \ln|x-1|\Big]_2^3 =$$

$= 1 + \ln 2 + \ln 3$. **Svar:** $1 + \ln 2 + \ln 3$.

---

4. Vi kontrollerar att påståendet ”$5^n - 1$ är jämnt delbart med 4” är sant för $n = 1$: ”$5^1 - 1$ är jämnt delbart med 4”. Detta är sant.

Antag att påståendet är sant för $n = k$, dvs antag att det är sant att $5^k - 1$ är jämnt delbart med 4.

Vi vill visa att påståendet är sant för $n = k + 1$, dvs vi vill visa att det är sant att $5^{k+1} - 1$ är jämnt delbart med 4.

Vi har $5^{k+1} - 1 = 5 \cdot 5^k - 1 = 5^k - 1 + 4 \cdot 5^k$. De båda talen $5^k - 1$ och $4 \cdot 5^k$ är jämnt delbara med 4 ($5^k - 1$ enligt antagandet) och då är deras summa också jämnt delbart med 4. Enligt induktionsprincipen är påståendet sant för $n = 1, 2, 3,$.

---

5. Eftersom $\dfrac{2001n^2 + 10n + 23}{23n^3 + 10n + 2001} > \dfrac{1}{n} > 0$ (för $n > 1$) och serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ är divergent (enligt majorantprincipen) serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2001n^2 + 10n + 23}{23n^3 + 10n + 2001}$ är divergent. **Svar:** Divergent.

---

6. Funktionen $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2} + \arctan x$ är definierad och deriverbar för alla x endast en kritisk punkt kan vara en lokal extrempunkt. Kritiska punkter fås ur ekvationen $f'(x) = 0$.

Här är $f'(x) = \dfrac{-(1+x^2) - 2x(1-x)}{(1+x^2)^2} + \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2x(x-1)}{(1+x^2)^2}$ och ur $\dfrac{2x(x-1)}{(1+x^2)^2} = 0$ fås två kritiska punkter $x = 0$ och $x = 1$.

I intervallet $x < 0$ är $f'(x) > 0$ f är växande på detta intervall.

I intervallet $0 < x < 1$ är $f'(x) < 0$ f är avtagande på detta intervall.

I intervallet $x > 1$ är $f'(x) > 0$ f är växande på detta intervall.

Av detta följer att $x = 0$ är en lokal maximipunkt och $x = 1$ är en lokal minimipunkt för f.

I dessa punkter antar f värdena $f(0) = 1$ och $f(1) = \pi/4$.

Eftersom $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pi/2 > 1$ och $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\pi/2 < \pi/4$ så antar f alla värden i det öppna intevallet $]-\pi/2, \pi/2[$.

Svar: lokal max i $x = 0$ och lokal min i $x = 1$. Värdemängden = $]-\pi/2, \pi/2[$.

7. Kurvorna $y = x\sqrt{5-x^2}$ och $y = x(3-x)$ skär varandra då $x\sqrt{5-x^2} = x(3-x)$ $x = 0$ eller $\sqrt{5-x^2} = 3-x$. Denna ekvation kvadreras ledvis. Man får $5 - x^2 = 9 - 6x + x^2$ och två lösningar $x = 1$ och $x = 2$, vilka uppfyller den ursprungliga ekvationen.

I intervallet $0 \le x \le 1$ är $x\sqrt{5-x^2} \le x(3-x)$ medan i intervallet $1 \le x \le 2$ är $x\sqrt{5-x^2} \ge x(3-x)$. Detta medför att den sökta arean ges av

$$A = \int_0^1 [\,x(3-x) - x\sqrt{5-x^2}\,]\,dx + \int_1^2 [\,x\sqrt{5-x^2} - x(3-x)\,]\,dx =$$

$$= \int_0^1 x(3-x)\,dx - \int_1^2 x(3-x)\,dx - \int_0^1 x\sqrt{5-x^2}\,dx + \int_1^2 x\sqrt{5-x^2}\,dx.$$

Vi har $\int_0^1 x(3-x)\,dx - \int_1^2 x(3-x)\,dx = \int_0^1 (3x-x^2)\,dx - \int_1^2 (3x-x^2)\,dx =$

$$= \Big[3x^2/2 - x^3/3\Big]_0^1 - \Big[3x^2/2 - x^3/3\Big]_1^2 = = \frac{7}{6} - \frac{13}{6} = -1.$$

och $-\int_0^1 x\sqrt{5-x^2}\,dx + \int_1^2 x\sqrt{5-x^2}\,dx = \{\,\sqrt{5-x^2} = t,\ 5 - x^2 = t^2,\ x\,dx = -t\,dt\,\} =$

$$= -\int_{\sqrt{5}}^{2} -t^2\,dt + \int_2^1 -t^2\,dt = \Big[t^3/3\Big]_{\sqrt{5}}^{2} - \Big[t^3/3\Big]_2^1 = \frac{8}{3} - \frac{5\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{3} = 5 - \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

alltså $A = -1 + 5 - \frac{5\sqrt{5}}{3} = 4 - \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

Svar: $4 - 5\sqrt{5}/3$.

---

8. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 4r + 4 = 0$ har en dubbel lösning $r = -2$ den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är $y_h = (Ax + B)e^{-2x}$.

En partikulär lösning y_1 till ekvationen $y'' + 4y' + 4y = 8x$ söks på formen $y = ax + b$:

$y' = a$, $y'' = 0$, vilket insatt i ekvationen ger $4a + 4(ax + b) = 8x$. Identifiering av de båda leden ger $4a = 8$ och $4a + 4 = 0$ dvs $a = 2$ och $b = -2$. Alltså $y_1 = 2x - 2$.

En partikulär lösning y_2 till ekvationen $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$ söks på formen $y = ax^2e^{-2x}$. (ae^{-2x} och axe^{-2x} är termer i y_h.) Man får $y' = 2a(1-x)e^{-2x}$ och $y'' = 2a(1 - 4x + 2x^2)e^{-2x}$, vilket insatt i ekvationen ger $2ae^{-2x} = 6e^{-2x}$ alltså $a = 3$ och $y_2 = 3x^2e^{-2x}$.

Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_1 + y_2$.

Svar: $y = (Ax + B)e^{-2x} + 2x - 2 + 3x^2e^{-2x}$.

---

9. Vi har $0 < 2\arcsin\frac{1}{3} < \pi$ och $0 < \arccos\frac{2}{3} < \frac{\pi}{2}$. Man får

$\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right) = \cos^2\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) - \sin^2\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$ och $\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} < \frac{7}{9}$.

Eftersom cos är en avtagande funktion på intervallet $0 \le x \le \pi$ så är $2\arcsin\frac{1}{3} < \arccos\frac{2}{3}$.

Svar: $\arccos\frac{2}{3}$.

---

10. a. Se kursboken sid 234.

b. $\int_x^y f(t)\,dt = \{$ integralkalkylens medelvärdessats $\} = (y - x)\,f(c)$

$(y-x)x^3 \le (y-x)\,f(c) \le (y-x)y^3$

$x^3 \le f(c) \le y^3$, (om $y > x$; omkastade olikheter om $x < y$)

(instängningsprincipen) $\lim_{y\to x+} f(c) = x^3$ (kontinuiteten) $f(x) = \lim_{y\to x} f(c) = x^3$.

Svar: $f(x) = x^3$.
