Institutionen för matematik, KTH
Olof Heden, Bronislaw Krakus, Harald Lang, Jan Olov Strömberg

Tentamensskrivning, 2000–03–07, kl. 14–19.

5B1102, Differential– och integralkalkyl I, del 2.

För godkänt krävs minst 32 poäng varav minst 4 uppgifter bedömda med minst 3 poäng.
Betygsgränserna för 4 och 5 är preliminärt 48 resp. 62 poäng.
Varje bonuspoäng ger 2 poäng på tentamen.
Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

ANGE GRUPPNUMMER ELLER L ärARENS NAMN P å OMSLAGET !

1. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 2$ i punkten (2,1,0). (4p)

2. a. Beräkna riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}$ till funktionen $f(x,y) = \dfrac{x+6y}{x+y}$ i punkten (1,0) i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (4,3)$. (En annan beteckning för riktningsderivatan är $D_{\boldsymbol{v}}f$.) (4p)

   b. Finns det någon vektor $\boldsymbol{u}$ sådan att $f'_{\boldsymbol{u}}(1,0) = 6$? (2p)

3. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till $f(x,y) = xy + \sin(x-y)$ kring punkten (1,1). Beräkna, med hjälp av detta polynom, ett approximativt värde av $f(1.1, 1.2)$. (5p)

4. En differentierbar funktion $f(x,y)$ har gradientvektorn $\operatorname{grad} f = (x+2y, 2x-4y)$.

   a. En ny funktion g definieras av $g(u,v) = f(x,y)$, där $x = u+v$ och $y = u+2v$. Bestäm gradientvektorn av g. (3p)

   b. Bestäm den potentialfunktion U till vektorfältet $\boldsymbol{F} = (x+2y, 2x-4y)$ för vilken $U(0,0) = 1$. (3p)

5. Låt $f(x,y) = a^2 e^{x-y} - a(x-y) + xy$. För vilka värden på konstanten a har f ett lokalt minimivärde i punkten (0,0)? (5p)

6. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma (2x-y)\,dx + (2x+4y)\,dy$ då Γ är parabelbågen $x = 1-y^2$ från punkten (0,1) till punkten (1,0). (4p)

7. Beräkna dubbelintegralen $\iint_{\mathbf{D}} (2x-y)\,dx\,dy$ då $\mathbf{D}$ begränsas av linjerna $y = x$, $y = x-1$, $y = 0$ och $y = 1$. (5p)

8. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathbf{S}} (x,y,z)\cdot\hat{\boldsymbol{N}}\,dS$ då $\mathbf{S}$ är den del av paraboloiden $z = 1-x^2-y^2$ som ligger ovanför xy–planet. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{N}}$ har positiv z–komponent. (6p)

v.g.v

9. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = xy$ då $x^2 + 4y^2 \leq 200$, $y \geq 7$. (6p)

10. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av planen $z = x - y$, $z = 2x - 2y$ och cylindern $x^2 + y^2 = 1$. (7p)

11. Beräkna trippelintegralen $\displaystyle\int_0^{\pi} dz \int_0^{2\pi - 2z} dy \int_0^{4\pi - 2y - 4z} \cos(x + 2y + 4z)\cos(x + 2y)\cos x \, dx$. (8p)

12. Som synes är $(x,y) = (0,0)$ en lösning till ekvationen $4x^2 + 3y^2 + \cos(2x^2 + y^2) = 1$. Visa att det inte finns någon annan lösning. (8p)

Lösningsförslag till tentamensskrivningen i Diff- och int., 5B1102, del 2, 2000–03–07.

1. Ytan ges på formen $f(x,y,z) = 2$ där $f(x,y,z) = xy^3 + yz^3 + zx^3$. I punkten $(2,1,0)$ fås $f'_x = y^3 + 3zx^2 = 1$, $f'_y = 3xy^2 + z^3 = 6$, $f'_z = 3yz^2 + x^3 = 8$, alltså $\operatorname{grad} f(2,1,0) = (1,6,8)$ och den sökta ekvationen är $(x-2, y-1, z-0)\cdot(1,6,8) = 0$, dvs **Svar:** $x + 6y + 8z = 8$.

2a Vi har $f(x,y) = \dfrac{x+6y}{x+y}$. I punkten $(1,0)$ får man $f'_x = \dfrac{-5y}{(x+y)^2} = 0$ och $f'_y = \dfrac{5x}{(x+y)^2} = 5$, vilket ger $\operatorname{grad} f(1,0) = (0,5)$ och $f'_{\boldsymbol{v}}(1,0) = \operatorname{grad} f(1,0)\cdot\dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = (0,5)\cdot\dfrac{(4,3)}{5} = 3$. **Svar:** $f'_{\boldsymbol{v}}(1,0) = 3$.

2b Största värdet av $f'_{\boldsymbol{u}}(1,0)$ fås då $\boldsymbol{u}$ har riktning av $\operatorname{grad} f(1,0)$. Detta värde är $= |\operatorname{grad} f(1,0)| = 5$, alltså det finns ingen vektor $\boldsymbol{u}$ sådan att $f'_{\boldsymbol{u}}(1,0) = 6$. **Svar:** Nej.

---

3. Det sökta Taylorpolynomet p ges av
$f(1,1) + f'_x(1,1)h + f'_y(1,1)k + \frac{1}{2}f''_{xx}(1,1)h^2 + f''_{xy}(1,1)hk + \frac{1}{2}f''_{yy}(1,1)k^2$ där $h = x-1$, $k = y-1$.
Vi har $f(x,y) = xy + \sin(x-y)$ och i punkten $(1,1)$ fås $f(1,1) = 1$, $f'_x = y + \cos(x-y) = 2$, $f'_y = x - \cos(x-y) = 0$, $f''_{xx} = -\sin(x-y) = 0$, $f''_{xy} = 1 + \sin(x-y) = 1$, $f''_{yy} = -\sin(x-y) = 0$. Alltså $p(x,y) = 1 + 2(x-1) + (x-1)(y-1)$ och $f(1.1, 1.2) \approx p(1.1, 1.2) = 1 + 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}2 = 1{,}22$.
Svar: $p(x,y) = 1 + 2(x-1) + (x-1)(y-1)$, $f(1.1, 1.2) \approx 1{,}22$.

4a Vi har $x = u + v$, $y = u + 2v$ samt $\operatorname{grad} f = (x+2y, 2x-4y) = (f'_x, f'_y)$. Kedjeregeln ger
$g'_u = f'_x\cdot x'_u + f'_y\cdot y'_u = (x+2y)\cdot 1 + (2x-4y)\cdot 1 = 3x - 2y = 3(u+v) - 2(u+2v) = u - v$ och
$g'_v = f'_x\cdot x'_v + f'_y\cdot y'_v = (x+2y)\cdot 1 + (2x-4y)\cdot 2 = 5x - 6y = 5(u+v) - 6(u+2v) = -u - 7v$, alltså
$\operatorname{grad} g = (g'_u, g'_v) = (u - v, -u - 7v)$. **Svar:** $\operatorname{grad} g = (u - v, -u - 7v)$

4b För potentialfunktionen U gäller att $U'_x = x + 2y$ och $U'_y = 2x - 4y$.
$U'_x = x + 2y$ medför att $U = x^2/2 + 2xy + h(y)$ och $U'_y = 2x + h'$. Samtidigt är $U'_y = 2x - 4y$ vilket innebär att $2x + h' = x - 4y$, dvs $h' = -4y$, $h(y) = -2y^2 + C$ och $U = x^2/2 + 2xy - 2y^2 + C$.
Ur $U(0,0) = 1$ fås $C = 1$. **Svar:** $U = x^2/2 + 2xy - 2y^2 + 1$

---

5. $(0,0)$ skall vara en kritisk punkt till f $f'_x(0,0) = 0$ och $f'_y(0,0) = 0$. Vi har
$f'_x = a^2e^{x-y} - a + y = \{\, x = 0, y = 0 \,\} = a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ eller $a = 1$ och
$f'_y = -a^2e^{x-y} + a + x = \{\, x = 0, y = 0 \,\} = -a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ eller $a = 1$,
alltså $(0,0)$ kan vara en lokal minimipunkt endast för dessa a-värden. Punktens karaktär:
I $(0,0)$ får man $A = f''_{xx} = a^2e^{x-y} = a^2$, $B = f''_{xy} = -a^2e^{x-y} + 1 = 1 - a^2$, $C = f''_{yy} = a^2e^{x-y} = a^2$ och $AC - B^2 = a^4 - (1-a^2)^2$.
För $a = 0$ fås $AC - B^2 = -1 < 0$ sadel.
För $a = 1$ fås $AC - B^2 = 1$ och $A = 1 > 0$ lokal minimum. **Svar:** $a = 1$.

---

6. Γ parametriseras: $y = t$, $x = 1 - t^2$ där t går från 1 till 0 $\mathrm{d}x = -2t\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}t$

$$\int_\Gamma (2x - y)\mathrm{d}x + (2x + 4y)\mathrm{d}y = \int_1^0 (4t^3 + 2)\,\mathrm{d}t = -3.$$

Svar: -3.

---

7. $$\iint_{\mathbf{D}} (2x - y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{y+1} (2x - y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[x^2 - xy\Big]_y^{y+1}\mathrm{d}y = \int_0^1 (y+1)\,\mathrm{d}x = 3/2.$$

Svar: 0.

---

8. Ytans normalvektorn $(-z'_x, -z'_y, 1) = (2x, 2y, 1)$ har samma riktning som $\hat{\boldsymbol{N}}$. Om $\mathbf{D}$ betecknar ytans projektion på xy–planet, dvs cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 1$, så har vi
$\iint_{\mathbf{S}} (x,y,z)\cdot\hat{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathbf{D}} (x,y,1 - x^2 - y^2)\cdot(2x, 2y, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbf{D}} (1 + x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ { polära koordinater } $= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}v\int_0^1 (1 + r^2)r\,\mathrm{d}r = \Big[v\Big]_0^{2\pi}\Big[r^2/2 + r^4/4\Big]_0^1 = 3\pi/2.$

Svar: $3\pi/2$.

9. Eftersom $f(x,y) = xy$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $x^2 + 4y^2 \le 200$, $y \ge 7$ är sluten och begränsad så antar f både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre kritisk punkt eller i en kritisk punkt på randen eller i en singulär punkt.

Inre kritiska punkter: Dessa fås ur ekvationssystemet $f'_x = y = 0$, $f'_y = x = 0$. Vi får punkten (0,0), men denna punkt tillhör inte den tillåtna mängden.

Kritiska punkter på randen $y = 7$: Man har $f(x,y) = xy = 7x = h(x)$ och ekvationen $h'(x) = 0$ har ingen lösning, alltså det finns inga kritiska punkter på denna del av randen.

Kritiska punkter på randen $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 200 = 0$ fås med hjälp av Lagranges metod: Vi löser ekvationssystemet grad $f = t$ grad g under bivillkoret $g(x,y) = 0$,

$$\begin{cases} f'_x = t\,g'_x \\ f'_y = t\,g'_y \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} y = 2tx \\ x = 8ty \\ x^2 + 4y^2 - 200 = 0 \end{cases}$$

Ur $4y \cdot$ ekvation1 $- x \cdot$ ekvation2 fås $x^2 = 4y^2$ vilket, insatt i ekvation3, ger $y = \pm 5$, dvs punkter som inte tillhör den tillåtna mängden.

Ur ekvationssystemet $x^2 + 4y^2 = 200$, $y = 7$ får man skärningspunkterna mellan randkurvorna. Vi får punkterna $(-2,7)$ och $(2,7)$. Några singulära punkter finns inte.

Sammanfattningsvis får vi punkterna $(-2,7)$ och $(2,7)$. I dessa punkter antar f värdena -14 och 14 alltså

Svar: Största värdet = 14, minsta värdet = –14.

---

10. Kroppens projektion, **D**, på xy–planet ges av $x^2 + y^2 \le 1$. Planen $z = x - y$, $z = 2x - 2y$ skär varandra längs linjen $y = x$ i xy–planet. Denna linje delar **D** i två delar $\mathbf{D}_1$ och $\mathbf{D}_2$ svarande mot $x \le y$ och $y \le x$. På $\mathbf{D}_1$ har vi $x - y \ge 2x - 2y$ och motsvarande volym är

$$V_1 = \iint_{\mathbf{D}_1} ((x-y) - (2x-2y))\,dx\,dy = \{\text{ polära koordinater }\} = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} dv \int_0^1 (r\sin v - r\cos v)r\,dr =$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin v - \cos v)\left[r^3/3\right]_0^1 dv = 1/3\left[-\cos v - \sin v\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}/3.$$

P.g.a symmetrin har den andra delen av kroppen lika stor volym.

Svar: $4\sqrt{2}/3$.

---

11. Integrationsgränserna upplyser om att $0 \le x \le 4\pi - 2y - 4z$, $0 \le y \le 2\pi - 2z$ och $0 \le z \le \pi$, vilket beskriver en tetraeder, begränsad av koordinatplanen och planet $x + 2y + 4z = 4\pi$. Vi kastar om integrationsordningen

$$\int_0^{4\pi} dx \int_0^{(4\pi - x)/2} dy \int_0^{(4\pi - x - 2y)/4} \cos(x + 2y + 4z)\cos(x + 2y)\cos x\,dz =$$

$$= \int_0^{4\pi} dx \int_0^{(4\pi - x)/2} \frac{-1}{8}\cos x \sin(2x + 4y)\,dy = \int_0^{4\pi} \frac{1}{16}\cos x \sin^2 x\,dx = 0.$$

Svar: 0.

---

12. Betrakta funktionen $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 + \cos(2x^2 + y^2)$. Vi kommer att visa att f antar ett minsta värde, att detta värdet är 1 och att det antas endast i punkten (0,0).

För $4x^2 + 3y^2 \ge 3$ har vi $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 + \cos(2x^2 + y^2) \ge 3 + \cos(2x^2 + y^2) \ge 3 - 1 = 2$.

På den slutna ellipsskivan $4x^2 + 3y^2 \le 3$ antar den kontinuerliga funktionen f ett minsta värde och detta värde måste antas i en kritisk punkt i skivans inre (f har inga singulära punkter och skivans rand är redan undersökt). Vi har

$f'_x = 8x - 4x\sin(2x^2 + y^2) = 4x(2 - \sin(2x^2 + y^2)) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ och

$f'_y = 6y - 2y\sin(2x^2 + y^2) = 2y(3 - \sin(2x^2 + y^2)) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0$

alltså (0,0) är den enda kritiska punkten och därmed den enda punkten där funktionen antar ett minsta värde.