Matematiska Institutionen KTH
B.Ek, J.Kristoferson, H.Shahgholian

Tentamensskrivning i linjär algebra, 5B1108 för linjerna B, Bio, K, L, M, T, V.

Måndagen den 25 oktober 1999 kl 14.00 - 19.00

Inga hjälpmedel.

Skrivningen består av 5 (nr 1-5) uppgifter à 3 poäng och 5 (nr 6-10) uppgifter à 4 poäng.
Med 4 möjliga bonuspoäng fås en totalsummma på 39 poäng.
Betygsgränser: 16-21 p ger betyg 3, 22-29 p ger betyg 4, 30-39 p ger betyg 5.

Obs! Lösningarna skall åtföljas av förklarande text och/eller figurer. Alla räkningar skall motiveras. Förutsättningarna för använda satser skall klart anges.

---

1. Bestäm $|z|$, $\arg(z)$, $\dfrac{1}{z}$ och $\overline{z}$, då $z = (-1+i)^3$.
$\dfrac{1}{z}$ och $\overline{z}$ skall ges på formen $a + ib$, där a och b är reella tal. (3p)

2. Lös matrisekvationen $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 25 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. (3p)

3. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna $(1,1,1), (1,-1,0)$ och $(0,0,4)$. (3p)

4. Lös ekvationen $z^2 - (1+3i)z + 8 - 9i = 0$. (3p)

5. Den linjära avbildningen T från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^3$ har följande beskrivning: projicera först ortogonalt på xy-planet och rotera sedan $\dfrac{\pi}{2}$ runt z-axeln (i positiv led, dvs så att (1,0,0) avbildas på (0,1,0)). Bestäm standardmatrisen för T och bilden av vektorn (6,7,8). (4p)

6. Vilken punkt i planet $x + 2y - 3z + 7 = 0$ ligger närmast punkten (1,1,1)? (4p)

7. Lös för varje värde på talet a systemet

$$\begin{cases} x + (a^2+1)y + az = 1 \\ x + 2y + az = 1 \\ x + 4y + (1+3a)z = 0 \end{cases}.$$ (4p)

8. Bestäm alla egenvektorer till matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$ (4p)

9. Skissera andragradskurvan $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 1$ med hjälp av att först med en vridning överföra den till standardposition. Vilken sorts kurva (ellips, hyperbel, parabel ...) är det fråga om? (4p)

10. T är en linjär avbildning från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{u}$ en vektor sådan att $T\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ men $T^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Visa att vektorerna $\mathbf{u}$ och $T\mathbf{u}$ utgör en bas för $\mathbf{R}^2$. (4p)