

Dagens 10/9

29. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

a. $\cos^2 \frac{1}{x}$.

b. $\ln \sqrt{\tan 2x}$

c. $x^{\sin x}$.

d. $\operatorname{arccot} \frac{1}{\sqrt{x}}$.

e. $2 \arccos \frac{2-x}{2} - \sqrt{4x-x^2}$.

f. $x^3 e^{-x} \sqrt{x-x^2}$

30. Beräkna derivatorna $\frac{dy}{dx}$ och $\frac{d^2y}{dx^2}$ uttryckta i x och y då funktionen $y = y(x)$ definieras av:

a. $x^3 y^3 + xy = 1$.

b. $\frac{x}{y} + \frac{y^3}{x^3} = 1$.

31. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan

a. $x^3 - xy + y^3 = 7$ i punkten $(2,1)$.

b. $\sqrt{2x+y} + \sqrt{x+y^3} = 5$ i punkten $(1,2)$.

32. Beräkna höger- och vänsterderivatorna i $x = 0$ till följande funktioner:

a. $f(x) = x \cos x$.

b. $f(x) = x \sin x$.

Svar:

29. a. $\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x}$

b. $\frac{2}{\sin 4x}$

c. $x^{\sin x} - 1(x \cos x \ln x + \sin x)$

d. $\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

e. $\frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}$

f. $\frac{x^3 e^{-x}(2x^2 - 10x + 7)}{2\sqrt{x-x^2}}$

30. a. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

31. a. Tangent: $11x + y = 23$. Normal: $x - 11y + 9 = 0$.

b. Tangent: $8x + 27y = 62$. Normal: $27x - 8y = 11$.

32. a. $f_+(0) = 1, f_-(0) = -1$. b. $f_+(0) = f_-(0) = 0$.

Dagens 11/9

33. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:

- a. $f(x) = 4 \arctan x + 5 \operatorname{arccot} 2x$
- b. $f(x) = 2 \ln(1 + (2x-2)^2) + \operatorname{arccot}(2x-2) + 2x$
- c. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.
- d. $f(x) = x + \arctan(1 - 2x)$.
- e. $f(x) = x + \ln(2 - 2x + x^2)$.
- f. $f(x) = 4x + 5 \ln(2 - 2x + x^2)$.

Svar:

- 33. a. Lok max i -1 , lok min i 1 .
- b. Lok max i -1 , lok min i 1
- c. Lok min i 1 och 3 , lok max i 2 .
- d. Lok max i 0 , lok min i 1 .
- e. Finns inga.
- f. Lok max i -1 , lok min i $1/2$.

Dagens 12/9

34. Bestäm största och minsta värdena till följande funktioner:

- a. $2x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $0 \leq x \leq 1$.
- b. $x + 2 \ln(-4 + 6x - x^2)$, $1 \leq x \leq 5$.
- c. $4\sqrt{1-x^2} + 3x$.
- d. $x^2 - 4|x-1| - 2x$, $0 \leq x \leq 4$.

35. Visa följande olikheter:

- a. $2 \ln x \leq x^2 - 1$, för alla $x > 0$.
- b. $\ln(1 + 2x) \leq \frac{3x}{x+2}$, för alla $x > 0$.
- c. $e^{-x} \leq 1 - x$, för alla x .

Svar:

- 34. a. $\sqrt{3}/2 + 1/2$ och 0 .
- b. $4 + 4 \ln 2$ och 1 .
- c. 5 och -3 .
- d. -1 och -5 .

Dagens 13/9

36. Visa att funktionen f är inverterbar

a. $f(x) = 3x - \arctan 2x.$

b. $f(x) = x\sqrt{1 + |x|}.$

37. Bestäm i förekommande fall det största och det minsta värdet till följande funktioner:

a. $f(x) = \ln(x+1) - 2 \arctan\sqrt{x}.$

b. $f(x) = \frac{-2x}{4x^2 + 1} + \arctan 2x.$

c. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 7 & \text{om } 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 13x + 37 & \text{om } 3 \leq x \leq 8 \end{cases}.$

38. Visa följande olikheter:

a. $\sin x + \cos x \leq 1 + 2x$, för alla $x \geq 0$.

b. $\ln(1 + 2x) + \ln(1 + 3x) \leq 5x$, för alla $x \geq 0$.

39. Bestäm definitionsmängden och värdemängden till funktionen

a. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}.$

b. $f(x) = \sqrt{1-x} + \arcsin x.$

Svar:

37. a. $\min = \ln 2 - \sqrt{2}$, max saknas.

b. Max och min saknas.

c. 7 och $-21/4$.

39. a. $D_f = [1, 3]$, $V_f = [\sqrt{2}, 2]$.

b. $D_f = [-1, 1]$, $V_f = [\sqrt{2}/2, \sqrt{2} - \sqrt{2}/2]$.