

Dagens 16/9 (några av uppgifterna sparas till 17/9)

40. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning 3 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.

a. $f(x) = \sin 3x$.

b. $f(x) = \ln(1 + 2x)$.

c. $f(x) = \ln(1 + 2x) \sin 3x$. (Använd 40a och b.)

d. $f(x) = e^{-3x}$.

e. $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$.

f. $f(x) = e^{-3x}\sqrt{1 + 2x}$.

41. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till följande funktioner. Restermen ges på ordoform.

a. $f(x) = \ln(1 + 2x)$ kring $x = 0$

b. $f(x) = \ln(3 + 2x)$ kring $x = 0$

c. $f(x) = \ln(1 + 2x)$ kring $x = 1$ (Använd 41a.)

d. $f(x) = \frac{1}{1 + 2x}$ kring $x = 0$

e. $f(x) = \frac{1}{1 + 2x}$ kring $x = -1$

f. $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3$ kring $x = 0$

g. $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3$ kring $x = -1$

Svar:

40. a. $3x - 9x^3/2 + O(x^4)$.

b. $2x - 2x^2 + 8x^3/3 + O(x^4)$.

c. $12x^2 - 12x^3 + O(x^4)$.

d. $1 - 3x + 9x^2/2 - 9x^3/2 + O(x^4)$.

e. $1 + x - x^2/2 + x^3/2 + O(x^4)$.

f. $1 - 2x + x^2 + 2x^3 + O(x^4)$.

41. a. $2x - 2x^2 + O(x^3)$

b. $\ln(3) + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + O(x^3)$

c. $\ln(3) + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + O((x-1)^3)$

d. $1 - 2x + 4x^2 + O(x^3)$

e. $-1 - 2(x+1) - 4(x+1)^2 + O((x+1)^3)$

f. $2 + 3x + 4x^2 + O(x^3)$

g. $14 + 26(x-1) + 19(x-1)^2 + O((x-1)^3)$

Dagens 17/9

42. Beräkna följande gränsvärden:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x + \sin 3x}{\ln(1 - 4x) + 5x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - e^{3x}}{e^{-x} - 1}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x \arctan 4x - \ln(1 + 16x^2)}{1 - \cos 4x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \ln(3 + 4x^5) - 5 \ln(4 + 3x^2))$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \frac{x}{x+1}$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}$

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin 2x \ln x$

j. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot 3x \ln(1 + 6x)$

l. $\lim_{x \rightarrow 0} x \arctan \frac{1}{2x}$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \sin 3x}{1 - e^{2x}}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arctan 2x - 2 \ln(1 + 3x)}{1 - \cos 4x}$

(Skriv på formen $\ln(\text{bråk})$.)

(Substituera $x = 1/t$)

(Använd $a^b = e^{b \ln a}$.)

($a \cdot b = b/(1/a)$)

k. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 6x)^{\cot 3x}$

Svar:

- | | | | | | | | |
|--------|----|----|-----------------------|----|---------|----|---------|
| 42. a. | 5. | b. | 2. | c. | 3. | d. | 9/8. |
| e. | 2 | f. | $4 \ln 2 - 5 \ln 3$. | h. | -1. | h. | e^2 . |
| i. | 0. | j. | 2. | k. | e^2 . | l. | 1/2. |

Dagens 19/9

43. Bestäm eventuella asymptoter till kurvorna:

- a. $y = \sqrt{x^4 + 6x^2 + 1} - x^2$
b. $y = \frac{(2x+1) \arctan 4x}{x+1}$.

44. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

- a. $y'' - y' - 2y = 0$.
b. $y'' - 6y' + 9y = 0$.
c. $y'' - 6y' + 13y = 0$.
d. $2y'' + 3y' + y = 0$.
e. $y'' + 2y' + 5y = 0$.
f. $y'' + 3y' = 0$.
g. $y'' + 4y = 0$.
h. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

45. Bestäm den lösning till $y'' - y' - 2y = 0$ som uppfyller $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Svar:

43. a. $y = 3$.
b. $y = \dots$, $y = -\dots$, $x = -1$.
44. a. $y = Ae^{-x} + Be^{2x}$
b. $y = e^{3x}(A + Bx)$
c. $y = e^{3x}(A \sin 2x + B \cos 2x)$
d. $y = Ae^{-x} + Be^{-x/2}$
e. $y = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$
f. $y = A + Be^{-3x}$
g. $y = A \cos 2x + B \sin 2x$
h. $y = e^{-2x}(A + Bx)$
45. $y = 1/3e^{-x} + 5/3e^{2x}$

Dagens 20/9

46. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

- a. $y' - y - 2y = 2x + 1.$
- b. $y' + 6y + 9y = 27x.$
- c. $y' - y = 2x + 1.$
- d. $y' - y - 2y = 4e^{3x}.$
- e. $y' - y - 2y = 20 \cos 2x.$

47. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

- a. $y' + y' - 2y = 4xe^{-x}.$
- b. $y' + y' - 2y = 20 \cos 2x e^{-x}.$
- c. $y' + y = 2 \cos x.$
- d. $y' - 2y' = 4x.$
- e. $y' + 4y = 24 \sin 4x.$
- f. $y' - 4y' + 13y = 40 \cos x.$

48. Bestäm den lösning till $y' - y - 2y = 2x + 1$ som uppfyller $y(0) = 2, y'(0) = 3.$

Svar:

- 46. a. $y = -x + Ae^{-x} + Be^{2x}$
 - b. $y = e^{-3x}(A + Bx) + 3x - 2$
 - c. $y = -3x - x^2 + A + Be^x$
 - d. $y = e^{3x} + Ae^{-x} + Be^{2x}$
 - e. $y = -\sin 2x - 3 \cos 2x + Ae^{-x} + Be^{2x}$
47. a. $y = (1 - 2x)e^{-x} + Ae^x + Be^{-2x}$
- b. $y = (-\sin 2x - 3 \cos 2x)e^{-x} + Ae^x + Be^{-2x}$
- c. $y = x \sin x + A \sin x + B \cos x$
- d. $y = -x - x^2 + A + Be^{2x}$
- e. $y = -2 \sin 4x + A \sin 2x + B \cos 2x$
- f. $y = 3 \cos x - \sin x + Ae^{2x} \sin 3x + Be^{2x} \cos 3x$
48. $y = -x + 2e^{2x}$