Kungl Tekniska Högskolan

Analysens grunder

Tomas Ekholm
Niklas Eriksen

Matematiska institutionen, 2001
Finansierat av Marianne och Marcus Wallenbergs Stiftelse

Grekiska alfabetet

alfa	A	α	iota	I	ι	rho	P	ρ
beta	B	β	kappa	K	κ	sigma	Σ	σ
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	my	M	μ	ypsilon	Υ	υ
epsilon	E	ε	ny	N	ν	fi	Φ	φ
zeta	Z	ζ	xi	Ξ	ξ	chi	X	χ
eta	H	η	omikron	O	o	psi	Ψ	ψ
theta	Θ	θ	pi	Π	π	omega	Ω	ω

Några ord på vägen

Detta kompendium är skapat för att användas som litteratur till KTHs Matematiska Cirkel under läsåret 2001–2002. Kompendiet består av sju avsnitt, som svarar mot de sju träffar vi planerat, samt ett inledande avsnitt om mängder. Kompendiet är, förutom avsnittet om mängder, inte tänkt att läsas på egen hand, utan ska ses som ett skriftligt komplement till undervisningen på de sju träffarna.

Som den mesta matematik på högre nivå är kompendiet kompakt skrivet. Detta innebär att man i allmänhet inte kan läsa det som en vanlig bok. Istället bör man pröva nya satser och definitioner genom att på egen hand exemplifiera. Därmed uppnår man oftast en mycket bättre förståelse av vad dessa satser och deras bevis går ut på.

KTHs Matematiska Cirkel finasieras av Marianne och Marcus Wallenbergs Stiftelse. Författarna tackar Dan Laksov för hans engagemang, tid och tro på matematik.

0 Mängdlära — en kort introduktion

För att på ett enkelt och kortfattat sätt kunna beskriva det vi önskar i följande kapitel krävs att vi behärskar lite elementär mängdlära. Vi ska därför gå igenom grunderna här.

En **mängd** innehåller **ting**, utan repetition. Tingen kallar vi för **element**. Den **tomma mängden** innehåller ingenting. Är det en liten mängd kan den presenteras genom att elementen skrivs i godtycklig ordning mellan ett par krullparenteser ($\{\}$).

Exempel *Mängden som innehåller elementen 1, 3 och a kan exempelvis skrivas $\{1, 3, a\}$ eller $\{1, a, 3\}$.*

Att ett element x ligger i mängden A betecknas $x \in A$. Att mängden B är en **delmängd** till mängden A, d.v.s. att alla element i B också är element i A, betecknas $B \subseteq A$.

Man är ofta intresserad av de element som är element i någon av två mängder, eller i båda mängderna.

Definition 0.1 **Unionen** *av två mängder A och B består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas $A \cup B$.* **Snittet** *av två mängder består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas $A \cap B$.*

Exempel *Låt $A = \{1, 3, 5, 6\}$ och $\{5, 8, 3, 4711\}$. Då har vi $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 8, 4711\}$ och $A \cap B = \{3, 5\}$.*

Antalet element i en mängd betecknas med beloppstecken. I exemplet ovan har vi $|A| = 4, |B| = 4, |A \cup B| = 6$ och $|A \cap B| = 2$.

Större mängder betecknas ofta med hjälp av en beskrivning. Innanför krullparenteser skriver man då ett uttryck, sedan ett kolon och därefter restriktioner för uttrycket. Detta visas bäst med ett exempel.

Exempel *Mängden av alla tal större än 3 kan skrivas $\{x : x > 3\}$. Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Då gäller följande likheter: $\{x^2 : x \in A\} = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ och $\{2^x : x \in A\} = \{2, 4, 8, 16, 32\}$.*

Vill man tala om att något gäller **för alla** element i en mängd A skriver man att detta gäller $\forall x \in A$. Att det **existerar** ett element i A som uppfyller något skriver man $\exists x \in A$.

Exempel *Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Det är* **inte** *sant att $x \leqslant 3, \forall x \in A$, eftersom det finns element i A som är större än 3. Däremot är det sant att $\exists x \in A$ sådant att $x \leqslant 3$.*

Vi ska nu avslutningsvis titta på några viktiga talmängder. Den mängd vi använder för att räkna föremål är de naturliga talen $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Denna mängd betecknas $\mathbb{N}$ och beteckningen kommer från **N**aturliga tal. Tar vi med negativa tal får vi heltalen $\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}$ (**Z**ahl (tal på tyska)). Tar vi kvoter av heltal (med nämnare skild från 0) får vi de rationella talen $\mathbb{Q}$ (från engelskans **Q**uotient (kvot)).

Man kan enkelt visa att de naturliga talen är lika många som heltalen. Definiera en funktion $f(x)$ från heltalen till de naturliga talen så att $f(x) = 2x$ för positiva tal x, $f(x) = -2x - 1$ för negativa tal x samt $f(0) = 0$. Därmed har varje heltal parats ihop med varsitt naturligt tal, så heltalen kan inte vara fler. De kan inte heller vara färre, eftersom de naturliga talen är en delmängd av heltalen. Alltså är de lika många. På liknande sätt kan man visa att de rationella talen är lika många som de naturliga talen (och därmed heltalen).

Den viktigaste talmängden inom analysen är de reella talen. Det är alla tal som kan skrivas som en (ändlig eller oändlig) decimalutveckling. Mängden av dessa betecknas $\mathbb{R}$. Man kan visa att de reella talen är fler än de naturliga.

För oändliga mängder kan vi inte ange antalet element i dessa med något vanligt tal. Däremot kan vi som ovan jämföra två oändliga mängder och se om dessa har lika många element. Storleken av sådana mängder ges av något som kallas **kardinaltal**. Vi har alltså $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$. De mängder som har samma kardinaltal som de naturliga talen (t.ex. heltalen och de rationella talen) kallas **uppräkneliga** (eftersom man kan räkna upp de naturliga talen). De mängder som har större kardinaltal (t.ex. de reella talen) kallas **överuppräkneliga**.

Både de rationella talen och de reella talen besitter egenskapen att mellan två sådana tal finns det alltid ett annat sådant tal. Detta är lätt att inse, eftersom medelvärdet $\frac{a+b}{2}$ av två rationella tal a och b är ett rationellt tal och medelvärdet av två reella tal är ett reellt tal. Vi kan fortsätta med att ta medelvärdet av detta tal och ett av de första, och sedan medelvärdet av detta nya tal och det föregående medelvärdet, och så vidare i all oändlighet. Vi inser då att mellan två rationella tal finns oändligt många rationella tal (det samma gäller för reella tal).

Vill man beteckna ett intervall av de reella talen använder man paranteser och hakparanteser. Exempelvis betecknar $[a, b]$ mängden av alla reella tal mellan a och b, inklusive dessa (d.v.s. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$) och (a, b) är samma intervall, men utan a och b ($(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$). Dessa intervall kallas **slutna** respektive **öppna**. Det finns även **halvöppna** intervall, t.ex. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$.

1 Binomialsatsen

För att i nästa avsnitt kunna definiera talet e måste vi lära oss litet grundläggande kombinatorik. Kombinatorik handlar om antalet sätt att göra olika saker. Exempelvis vet varje kombinatoriker hur många fyrsiffriga portkoder det finns, som saknar upprepade siffror (det är 5040 stycken). Vi kommer i detta avsnitt att titta närmare på antalet sätt att välja k objekt ur en mängd av n objekt och se hur detta hänger ihop med uttryck på formen $(a+b)^n$.

Antag att vi vill beräkna $(a+b)^3$. Detta kan skrivas som $(a+b)(a+b)(a+b)$ och utvecklar vi detta får vi $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. På samma sätt kan varje produkt på formen $(a+b)^n$ skrivas som en summa av ett antal termer. Dessa termer är alltid på formen av ett heltal multiplicerat med en potens av a (d.v.s. a^k för något k) multiplicerat med en potens av b. Men vilka potenser är möjliga och vilka heltal står framför de olika kombinationerna?

Ett sätt att se på summan $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ är att varje term fås genom att välja antingen a eller b ur varje faktor i produkten $(a+b)(a+b)(a+b)$. Om vi väljer a ur den första faktorn, b ur den andra och a ur den tredje får vi termen a^2b. För varje faktor finns två möjligheter (a eller b), så sammanlagt har vi $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ termer. Vissa av dessa är lika, så vi kan skriva ihop dem till en term. Väljer vi som ovan får vi t.ex. termen a^2b. Men det får vi även om vi väljer vårt b ur första eller tredje faktorn, så det finns tre sätt att få a^2b. Det är därför vi får termen $3a^2b$ i summan ovan.

Ur varje faktor måste vi välja exakt en av a och b. Om vi adderar potenserna för a och b ska vi alltså få n. Det stämmer med exemplet, eftersom potenserna i tur och ordning är $3+0=2+1=1+2=0+3=3$. Vi kan inte heller ha negativa potenser, så ingen potens är högre än n.

Vi har alltså konstaterat att $(a+b)^n$ kan utvecklas som en ändlig summa ($n+1$ termer närmare bestämt), där alla termer är på formen $ca^{n-k}b^k$ och c är ett heltal. Detta heltal ges av antalet sätt att välja exakt k stycken b:n bland n möjliga. Låt oss beteckna detta tal $\binom{n}{k}$. Vi kan då skriva produkten som

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n.$$

Denna summa, som är så lång att den går ut i marginalen, kan kortare skrivas som

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Vi tolkar detta som att vi får en term för varje heltal k mellan 0 och n. Vi byter då ut k i uttrycket mot dessa heltal. Exempelvis fås första termen a^n i summan ovan genom att sätta in 0 i stället för k.

Formeln

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

kallas **binomialsatsen** och talen $\binom{n}{k}$ kallas **binomialkoefficienter** (de uttalas "n välj k" eller "n över k"). Satsen är dock inte särskilt användbar om vi inte kan uttrycka binomialkoefficienterna på ett enklare sätt. Vi ska strax göra detta, men vi behöver känna till följande hjälpsats (hjälpsatser kallas lemmor i matematisk skrift).

Lemma 1.1 *Antalet sätt att sortera k element är $k!$. Att sortera innebär att ge elementen en ordning.*

BEVIS Vi vill sortera k stycken element, d.v.s. bestämma en ordning bland dessa. När vi väljer det första elementet har vi k alternativ (alla element kan väljas). När vi väljer det andra elementet är ett element redan valt, så vi har nu bara $k-1$ alternativ. Sammanlagt kan de två första elementen väljas på $k \cdot (k-1)$ olika sätt.

På samma sätt ser vi att det tredje elementet kan väljas på $k-2$ olika sätt, vilket ger $k \cdot (k-1) \cdot (k-2)$ alternativ för de tre första elementen. Sammanlagt för alla elementen får vi så småningom $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = k!$ olika alternativ. $\square$

Vi kan nu skriva binomialkoefficienterna på ett enklare sätt.

Sats 1.2 *Binomialkoefficienterna $\binom{n}{k}$ ges av*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

där $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (uttalas "n-fakultet"). Vi definierar dessutom $0! = 1$.

BEVIS Ett sätt att välja k element ur en mängd av n element är att sortera alla n elementen, och sedan välja de k första. n element kan, enligt lemmat, sorteras på $n!$ olika sätt.

Antag att vi har sorterat de n elementen. Om vi nu ändrar ordning på de k första elementen får vi samma val av k element. Det spelar uppenbarligen ingen roll i vilken ordning de k första elementen ligger, eftersom alla dessa blir valda. Vi kommer alltså att få samma val av k element $k!$ gånger. På samma sätt spelar ordningen av de övriga $n-k$ elementen ingen roll, så vi får samma val av k element $k!(n-k)!$ gånger. Men vi vill ha varje val precis en gång. Vi måste alltså dela med både $k!$ och $(n-k)!$ för att få antalet sätt att välja k element ur n element. Därmed har vi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$\square$

Binomialkoefficienterna kan även beskrivas med hjälp av en rekursionsformel (en rekursionsformel är en formel där vi beräknar tal i en talföljd med hjälp av tal som ligger tidigare i talföljden). I detta fall kan man resonera som så: Om vi bland talen $\{1, 2, \ldots, n\}$ ska välja k tal, så är talet n antingen med eller inte med (fler alternativ finns inte). Om n är med i valet, väljer vi övriga $k-1$ tal bland $n-1$ tal. Detta kan göras på $\binom{n-1}{k-1}$ olika sätt. Om n inte är med i valet ska vi välja k tal bland de $n-1$ övriga, vilket kan göras på $\binom{n-1}{k}$ sätt. Vi behöver alltså bara känna till binomialkoefficienterna för $n-1$ för att beräkna dem för n. Formeln lyder

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

med begynnelsevärden $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, för alla heltal n. Vi kan nu skriva upp binomialkoefficienterna i en struktur som är känd under namnet Pascals triangel. Begynnelsevärdena finner vi på kanterna och enligt rekursionsformeln är varje tal lika med summan av de två talen närmast ovanför.

Tabell 1: Pascals triangel. I rad n och position k från vänster finner vi $\binom{n-1}{k-1}$. Överst har vi alltså $\binom{0}{0}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Hur snabbt växer $n!$ med n? Om vi ökar n till $n+1$ så multiplicerar vi $n!$ med $n+1$. $n!$ borde alltså öka väldigt snabbt. Följande sats visar att så är fallet. Lägg märke till att talet 2 i satsen kan bytas ut mot godtyckligt positivt tal, om vi ändrar den nedre gränsen för n

Sats 1.3 *För $n \geqslant 4$ gäller att $n! > 2^n$.*

Bevis Betrakta kvoten $n!/2^n$. Om den är större än 1 följer att $n! > 2^n$. Men om $n \geqslant 4$ har vi

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2\cdot 2} = \frac{n}{2}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{6}{2}\frac{5}{2}\frac{4}{2}\frac{3}{2}\frac{2}{2}\frac{1}{2} > \frac{n}{2}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{6}{2}\frac{5}{2} > 1.$$

□

Övning 1.1 *Genom att välja lämpliga värden på a och b, visa att*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

och att (för $n > 0$)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$

Övning 1.2 *Utöka Pascals triangel med några rader. Vilka tal finns på andra respektive tredje diagonalen från vänster? Hur ser rekursionsformeln ut i dessa fall ($k = 1$ resp $k = 2$)?*

Övning 1.3 *Vi ser att Pascals triangel verkar vara symmetrisk. Bevisa detta!*

Övning 1.4 *För er som läst induktion: Använd induktion för att visa sats 1.2 med hjälp av rekursionen.*

Ledning*: Utför induktionen i n-led, d.v.s. antagandet är att formeln gäller för alla k med $n = p - 1$ och sedan visar man det för alla k med $n = p$. Man inser enkelt att $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, så vi behöver bara visa formeln för de k som är sådana att $1 \leqslant k \leqslant n - 1$.*

2 Gränsvärden och talföljder

Vilket tal i mängden $[0, 1]$ är störst? Talet 1 verkar ju vara en given vinnare, vilket också stämmer. Om jag nu frågar efter det största talet i mängden $[0, 1)$ blir det betydligt svårare. Svaret är att inget tal är störst. (Varför? Om något tal är störst borde vi kunna ange det, eller hur?) Låt oss generalisera vår intuitiva uppfattning av största elementet i en mängd.

Definition 2.1 *M är en* **övre begränsning** *till en mängd A om $\forall x \in A$ gäller att $x \leqslant M$.*

De reella talen har egenskapen att varje uppåt begränsad mängd har en minsta övre begränsning. Detta är inte sant för de rationella talen då t.ex. $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ saknar minsta övre begränsning ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Definition 2.2 **Supremum** *av en mängd A eller $\sup A$ definieras som den minsta övre begränsningen av A, d.v.s.*

$$\sup A = \min\{M : M \text{ är en övre begränsning till } A\}.$$

Exempel 2.3 $\sup\,[0, 1] = \max\,[0, 1] = 1.$

Exempel 2.4 $\sup\,[0, 1) = 1$ *medan* $\max\,[0, 1)$ *saknas.*

För att kunna definiera gränsvärden måste vi veta vad vi menar med att något tal är nära något annat tal. Låt oss definiera **beloppet av** x som

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, då } x \geqslant 0 \\ -x & \text{, då } x < 0 \end{cases}$$

Beloppet av x anger avståndet från x till talet 0. Lite mer allmänt kan vi skriva $|x - a| = b$ som betyder att avståndet från x till a är b.

Vi ska i detta kapitel studera oändliga följder av tal, t.ex.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots .$$

Låt oss betrakta en godtycklig talföljd av reella tal $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eller lite förenklat $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. En naturlig fråga är om talföljden stabiliserar sig vid något värde för stora värden på n. I exemplet ovan tycks talföljden närma sig 0. Men för att exakt veta vad vi menar med att en talföljd närmar sig ett värde, måste vi införa en definition.

Definition 2.5 *En talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sägs* **konvergera mot gränsvärdet** *A om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n - A| < \varepsilon$ då $n \geqslant N$. Vi inför beteckningen*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

En talföljd med denna egenskap kallas **konvergent**, *annars* **divergent**.

Sats 2.6 *Låt* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *och* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *vara konvergenta talföljder med gränsvärdena* A *respektive* B*. Då följer att talföljden*

1. $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *är konvergent med gränsvärdet* $A + B$*,*
2. $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *är konvergent med gränsvärdet* AB*.*

Bevis Vi använder oss av definitionen.

1. Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett N sådant att $|a_n + b_n - A - B| < \varepsilon$ för alla $n \geqslant N$.
$$|a_n + b_n - A - B| \leqslant |a_n - A| + |b_n - B|$$
Då $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot A och $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot B får vi att det finns tal N_1 och N_2 så att
$$|b_n - B| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{då } n \geqslant N_1$$
och
$$|a_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{då } n \geqslant N_2.$$
Detta ger att
$$|a_n + b_n - A - B| \leqslant \varepsilon, \quad \text{då } n \geqslant \max(N_1, N_2).$$

2. Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett N sådant att $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$ för alla $n \geqslant N$.
$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \leqslant |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| \\ &= |a_n|\,|b_n - B| + |B|\,|a_n - A|\,. \end{aligned}$$
Då $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot A, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot B och $\max_{n \geqslant 1} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = K < \infty$ får vi att det finns tal N_1 och N_2 så att
$$|b_n - B| \leqslant \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \text{då } n \geqslant N_1$$
och
$$|a_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2B}, \quad \text{då } n \geqslant N_2.$$
Detta ger att
$$|a_n b_n - AB| \leqslant \varepsilon, \quad \text{då } n \geqslant \max(N_1, N_2).$$

□

En talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kallas växande om $a_{n+1} \geqslant a_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$ och uppåt begränsad om det finns ett tal M sådant att $a_n \leqslant M$ för alla $n \in \mathbb{N}$. M är alltså en övre begränsning till mängden $\{a_1, a_2, a_3, ...\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Sats 2.7 *En talföljd som är växande och uppåt begränsad är konvergent.*

BEVIS Antag att talföljden är uppåt begränsad av talet M. Vi vet då att alla tal i talföljden är mindre än eller lika stora som M. Det kanske finns ett mindre tal än M som har samma egenskap. Låt oss kalla det minsta tal som är en övre begränsning till $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ för K. Då K är den absolut minsta övre begränsningen till talföljden så finns det element i talföljden oändligt nära K (i vissa fall även lika stora som K). D.v.s. för varje givet $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_N - K| < \varepsilon$. Men då talföljden är växande kommer $|a_n - K| < \varepsilon$ för alla $n \geqslant N$. Vi är klara och har dessutom visat att gränsvärdet av talföljden är precis K, d.v.s.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = K.$$

$\square$

Sats 2.8 *Talföljden*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

är konvergent.

BEVIS Vi vill använda föregående sats, alltså måste vi verifiera att $\{a_n\}$ är växande och uppåt begränsad. Låt oss nyttja binomialsatsen:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Vi studerar varje term i detalj.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\
&= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \\
&= \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

För att nu inse att talföljden är växande studerar vi a_n och a_{n+1}.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

och analogt följer att

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

Låt oss jämföra de termer vi får för ett givet k. Vi har att

$$1-\frac{i}{n} < 1-\frac{i}{n+1}, \quad i = 1,2,...,k-1$$

vilket ger att

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

För varje k i summorna är termen från a_{n+1} större än den från a_n. Dessutom innehåller a_{n+1} en term mer än a_n som också ger ett positivt bidrag. Alltså är $a_{n+1} > a_n$ för alla $n \geqslant 1$.

Låt oss nu även verifiera att $\{a_n\}$ är uppåt begränsad. Återigen använder vi oss av framställningen

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

då varje parantes är mindre än 1. Vi har i kapitel 1 visat att $k! > 2^k$ för alla $k \geqslant 4$. Detta passar nu perfekt för vår uppskattning.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Vi påminner oss nu om formeln för en geometrisk summa (vilken är enkel att verifiera, hur?),

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

I vårt fall får vi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 3.$$

Vi har nu visat att $\{a_n\}$ både är växande och uppåt begränsad vilket ger att $\{a_n\}$ är konvergent. $\square$

Definition 2.9

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Från beviset av att talföljden konvergerar får vi att $e < 3$ och om vi sätter $n = 1$ får vi att $e > 2$.

Exempel 2.10 *Låt oss visa att*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

konvergerar mot e även då $n \to -\infty$. Vi bildar talföljden $\{b_n\}$, där

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

och frågar oss vad $\{b_n\}$ konvergerar mot då $n \to \infty$.

$$
\begin{aligned}
b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \\
&= \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n .
\end{aligned}
$$

Vi utför variabelbytet $n - 1 = m$,

$$
\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \to e, \text{ då } m \to \infty.
$$

Övning 2.1 *Visa att*

$$
\sup\left\{\frac{3n+1}{n+2} \ : \ n = 0, 1, 2, 3, ...\right\} = 3.
$$

Övning 2.2 *Verifiera formeln för en geometrisk summa ($x \neq 1$), d.v.s.*

$$
\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.
$$

Övning 2.3 *Visa att talföljden $\{a_n\}$*

$$
a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)
$$

är konvergent. Vad är gränsvärdet?

Övning 2.4 *För en konvergent talföljd $\{a_n\}$ gäller att*

$$
\lim_{n\to\infty} (a_n)^5 = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^5 .
$$

Använd detta för att visa att

$$
\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n = e^5
$$

3 Kontinuitet

Vi har i föregående kapitel definierat vad vi menar med att en talföljd $\{a_n\}$ konvergerar mot ett gränsvärde då $n \to \infty$. Denna definition är enkel att generalisera till funktioner. Vi börjar med att förklara vad som menas med en funktion. Låt oss anta att vi har två mängder A och B. Varje element x i A tilldelas ett unikt element y i B. Denna avbildning f som överför x på y kallas en **funktion**. A som betecknas D_f kallas **definitionsmängd** och B **målmängd**. En vanlig beteckning för allt detta är $f : A \to B$ som betyder att f är en funktion från definitionsmängden A till målmängden B.

Exempel 3.1 *Låt* $f(x) = x^2$, $D_f = [-5, -2] \cup [1, 2]$. *Som målmängd kan vi ta* $\mathbb{R}$ *eller* $[1, 25]$.

Ett något mer abstrakt exempel kan se ut enligt följande.

Exempel 3.2 *Låt* $A = \{x, y, z\}$ *och* $B = \{a, b, c\}$. *Låt oss definiera en funktion* $f : A \to B$ *genom att* $f(x) = b$, $f(y) = a$ *och* $f(z) = b$.

Definition 3.3 *En funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sägs ha* **gränsvärdet** A **då** $x \to \infty$ *om det för alla* $\varepsilon > 0$, *finns ett* N *sådant att* $|f(x) - A| < \varepsilon$ *då* $x \in D_f$ *och* $x \geqslant N$. *Vi inför beteckningen*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Exempel 3.4 *Låt* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Då* x *växer, avtar* $\frac{1}{x}$ *mot* 0. *Låt oss visa att*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Tag ett $\varepsilon > 0$. *Vi vill visa att vi kan välja ett* N *(som beror på värdet av* ε*) sådant att*

$$\frac{1}{x} = \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

då $x \geqslant N$. *Detta följer om vi väljer* $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

Exempel 3.5 *Låt oss betrakta funktionen*

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1},$$

då $x \to \infty$. *Vi skriver om uttrycket något*

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \to \frac{2}{1} = 2, \text{ då } x \to \infty.$$

Man kan även använda sig av följande identitet

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1} \to 2, \text{ då } x \to \infty.$$

Med funktioner är man emellertid inte endast intresserad av gränsvärden då $x \to \infty$ utan även i en godtycklig punkt. Vi inför detta med en liknande definition.

Definition 3.6 *En funktion f sägs ha* **gränsvärdet** A **då** $x \to a$ *om det för alla $\varepsilon > 0$, finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ då $0 < |x - a| < \delta$. Vi inför beteckningen*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Vi är nu redo för att definiera derivata.

Definition 3.7 *Låt f vara en funktion definierad på $\mathbb{R}$. Om gränsvärdet*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar, sägs f vara **deriverbar i punkten** x*. Gränsvärdet betecknas med $f'(x)$ och kallas* **derivatan av** f **i punkten** x*.*

Exempel 3.8 *Ett välbekant exempel är*

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x\end{aligned}$$

d.v.s. att derivatan av x^2 är $2x$.

Vår definition av gränsvärde då $x \to a$ tar hänsyn till hur funktionen ser ut på båda sidor om $x = a$. Anta att en funktion f är definierad över ett intervall $D_f = (a, b)$. Då är det omöjligt att använda vår definition av gränsvärde då $x \to a$ (ty funktionen finns ju inte till vänster om a). Vi vill veta hur f beter sig nära $x = a$ men endast sett från större värden än $x = a$. Vi gör följande definition.

Definition 3.9 *Låt f vara en funktion som innehåller intervallet (a, b) i sin definitionsmängd. f sägs ha* **högergränsvärdet** A **då** $x \to a$ *om $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ då $0 < x - a < \delta$. Vi inför beteckningen*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A.$$

På motsvarande sätt inför vi vänstergränsvärde. Om vi funderar ett tag över dessa definitioner av gränsvärde får vi följande sats.

Sats 3.10 *Låt f vara en funktion, då följer att*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = A$$

Definition 3.11 *En funktion f sägs vara* **kontinuerlig i punkten** $x = a$ *om*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

f sägs vara kontinuerlig om f är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd.

En funktion är alltså kontinuerlig i $x = a$ om och endast om högergränsvärde, vänstergränsvärde och funktionens värde i $x = a$ sammanfaller.

Exempel 3.12 *Funktionen*

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{, då } x \leqslant 1 \\ \frac{x-1}{x} & \text{, då } x > 1 \end{cases}$$

är kontinuerlig i punkten $x = 1$ ty funktionerna $f(x) = 3x - 3$ och $f(x) = \frac{x-1}{x}$ är kontinuerliga i respektive definitionsområde och

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x - 1}{x} = 0 = f(1).$$

Lemma 3.13 *Låt f vara kontinuerlig i punkten $x = a$ och $f(a) > \mu$. Då existerar ett öppet intervall I kring $x = a$ sådant att $f(x) > \mu$ för alla $x \in I$.*

Bevis Tag $\varepsilon > 0$ sådant att $f(a) - \mu > \varepsilon$, vilket är ekvivalent med att $f(a) - \varepsilon > \mu$. Då f är kontinuerlig i $x = a$ gäller att

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

som i sin tur betyder att vi kan finna ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ då $|x - a| < \delta$. Att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ betyder att $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, vilket ger att $\mu < f(a) - \varepsilon < f(x)$ för alla $x \in I = \{x : |x - a| < \delta\}$. $\square$

Sats 3.14 *Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.*

Bevis Om $f(a) = f(b)$ finns det inget att visa. Antag att $f(a) < f(b)$, det motsatta fallet kan behandlas analogt. Låt μ vara ett godtyckligt tal sådant att $f(a) < \mu < f(b)$ Vi vill visa att det finns ett tal $x = \lambda$ sådant att $f(\lambda) = \mu$.

Låt oss bilda mängden $M = \{x \in [a, b] : f(x) < \mu\}$ som ej är tom eftersom $a \in M$ (eller hur?). Vi ska nu visa att $\lambda = \sup M$ uppfyller att $f(\lambda) = \mu$. Ett sätt att visa detta är att visa att $f(\lambda) \not< \mu$ och att $f(\lambda) \not> \mu$.

Antag att $f(\lambda) < \mu$. Eftersom $f(\lambda) < \mu < f(b)$ måste $\lambda < b$. Enligt föregående lemma finns det nu ett öppet intervall I kring λ sådant att $f(x) < \mu$ för alla $x \in I$, d.v.s. det finns ett tal $\delta > 0$ sådant att $f(x) < \mu$ då $\lambda \leqslant x < \lambda + \delta$. Alla dessa x ligger alltså i M, men detta strider ju mot att $\lambda = \sup M$. Vi har fått en motsägelse till vårt antagande att $f(\lambda) < \mu$.

Antag nu att $f(\lambda) > \mu$. Eftersom $f(\lambda) > \mu > f(a)$ måste $\lambda > a$. Återigen får vi från föregående lemma att det finns ett tal $\delta > 0$ sådant att $f(x) > \mu$ då $\lambda - \delta < x \leqslant \lambda$. Detta betyder att det inte kan finnas något tal i M i intervallet $(\lambda - \delta, \lambda)$. Detta strider mot att $\lambda = \sup M$.

Vi har fått önskad likhet $f(\lambda) = \mu$. Då μ var godtyckligt vald i $[a, b]$ gäller att f antar alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$. □

Övning 3.1 *Visa med hjälp av definitionen för gränsvärde att derivatan av*

1. x^3 *är* $3x^2$.
2. $\frac{1}{x}$ *är* $-\frac{1}{x^2}$

Övning 3.2 *Visa med hjälp av definitionen för gränsvärde att*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Övning 3.3 *Bestäm konstanterna* a, b *och* c *så att funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definierad som*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{, då } x < 2 \\ a & \text{, då } x = 2 \\ bx + c & \text{, då } x > 2 \end{cases}$$

och dess derivata blir kontinuerliga funktioner.

Övning 3.4 *Visa med hjälp av konjugatregeln att*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

4 Funktionslära

Vi definierade i föregående avsnitt vad en funktion är och även funktionens definitions- och målmängd. Det finns ytterligare en mängd som är intressant i samband med funktioner, nämligen funktionens **värdemängd**. Värdemängden till funktionen $f : A \to B$ betecknas V_f. Den består av alla de element $y = f(x)$ i målmängden B som minst ett element x i definitionsmängden avbildas på. Det är helt enkelt de element i B som fås, om vi låter f verka på alla element i A. Vi kan även beteckna värdemängden $f(A)$.

Exempel 4.1 *Låt funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x^2$. Denna funktion omvandlar varje $x \in \mathbb{R}$ till ett* icke-negativt *reellt tal. Vi vet även att vi kan få varje icke-negativt reellt tal genom att kvadrera något reellt tal. Värdemängden blir alltså alla icke-negativa reella tal, $\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} = [0, \infty)$.*

Ibland vill man sätta samman två funktioner till en funktion. Detta kan bara göras om den första funktionens värdemängd ligger helt i den andra funktionens definitionsmängd. Enklast uppnår vi detta genom att den första funktionens målmängd sammanfaller med den andra funktionens definitionsmängd.

Definition 4.2 Sammansättningen *av två funktioner $f : A \to B$ och $g : B \to C$ är en funktion $(g \circ f) : A \to C$ sådan att $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Ofta har man ett värde $y = f(x)$ givet av en funktion $f : A \to B$, och vill beräkna vilket element x som gav detta värde. I bästa fall kan vi definiera en funktion $g : B \to A$ sådan att sammansättningarna $(f \circ g) : B \to B$ och $(g \circ f) : A \to A$ båda är **identitetsfunktioner**, d.v.s. att $(f \circ g)(x) = x$ och $(g \circ f)(x) = x$. Med denna nya funktion kan man beräkna vilket element som matades in i den första funktionen, oavsett vilket värde som matats ut.

Definition 4.3 *Låt $f : A \to B$ vara en given funktion. En funktion $g : B \to A$, sådan att $(f \circ g) : B \to B$ och $(g \circ f) : A \to A$ båda är identitetsfunktioner, kallas* **invers** *till f. Vi skriver ofta funktionen g som f^{-1}.*

Exempel 4.4 *Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x^2$. Vi kan då inte definiera någon invers, eftersom det finns två värden på x som ger funktionsvärdet 4, nämligen 2 och -2. Om vi definierar g så att $g(4) = 2$ får vi $(g \circ f)(-2) = g(4) = 2 \neq -2$ och om vi definierar $g(4) = -2$ får vi $(g \circ f)(2) = g(4) = -2 \neq 2$. Det går alltså inte att göra $(g \circ f)$ till en identitetsfunktion.*

Om vi däremot begränsar funktionen f till icke-negativa reella tal, d.v.s. vi sätter $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$, så kan vi definiera $g(y) = \sqrt{y}$. Då får vi $(f \circ g)(y) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ och $(g \circ f)(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x$.

Man vill naturligtvis kunna avgöra när en funktion har invers utan att behöva ta reda på inversen, vilket kan vara svårt. Viss hjälp har man av följande två begrepp.

Definition 4.5 *En funktion vars målmängd och värdemängd sammanfaller kallas* **surjektiv**.

Definition 4.6 *En funktion f som inte avbildar två värden på samma värde, d.v.s. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, kallas* **injektiv**. *Detta är liktydigt med att $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.*

Definition 4.7 *En funktion som är både injektiv och surjektiv kallas* **bijektiv**.

Vi kan nu presentera följande sats.

Sats 4.8 *En bijektiv funktion har en invers. Omvänt gäller att funktioner med invers är bijektiva.*

BEVIS Vi antar att funktionen $f : A \to B$ är bijektiv. Eftersom den är surjektiv finns till varje $b \in B$ minst ett $a \in A$ så att $f(a) = b$. Eftersom f är injektiv finns till varje $b \in B$ maximalt ett $a \in A$ så att $f(a) = b$. Det finns alltså för varje $b \in B$ **precis** ett $a \in A$ så att $f(a) = b$. Definiera $g : B \to A$ så att $g(b)$ blir precis detta värde a.

Det är nu enkelt att inse att $(f \circ g)(b) = f(a) = b$ och att $g \circ f(a) = g(b) = a$, så både $(f \circ g)$ och $(g \circ f)$ är identitetsfunktioner.

Vi antar nu att funktionen $f : A \to B$ har inversen $f^{-1} : B \to A$. Eftersom $(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = b, \forall b \in B$ vet vi att för varje $b \in B$ så avbildas $f^{-1}(b)$ på b. Därmed är värdemängden för f identisk med målmängden och f är således surjektiv.

Under antagandet att f har en invers visar vi lätt injektivitet:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

vilket innebär att f är injektiv. □

Som en följdsats kan vi konstatera att eftersom inversen till en funktion f har invers (f är denna invers) är även inversen bijektiv.

Övning 4.1 *Skriv funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+6)^4 + 2$ som en sammansättning av funktionerna $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, där $g(x) = x^2$ och $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, där $h(x) = x + 2$.*

Övning 4.2 *Visa att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definierad som $f(x) = x^3$ har en invers.*

Övning 4.3 *Visa att sammansättningen av två bijektiva funktioner $f : A \to B$ och $g : B \to C$ har invers. Bestäm inversen, uttryckt i f^{-1} och g^{-1}.*

Övning 4.4 *En* **permutation** *är en omkastning (eller sortering) av ett ändligt antal element. Ett exempel på en permutation är $\pi = 4\ 2\ 5\ 6\ 3\ 1$, vilket är en omkastning av ordningen 1 2 3 4 5 6. Detta kan ses som en funktion $f : [6] \to [6]$, där $[n] = \{1, 2, \ldots n\}$. Vi tänker oss då att vi på plats x har talet $f(x)$. Exempelvis står 4 på plats 1, så $f(1) = 4$. Visa, med hjälp av sats 4.8 att permutationer har invers. Bestäm inversen till $\pi = 4\ 2\ 5\ 6\ 3\ 1$.*

5 Exponentialfunktionen

Det har nu blivit dags att betrakta exponentialfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = e^x$. Det tal som står nederst (i detta fall e) kallas **bas** och det tal x som står över kallas **exponent**. De räknelagar vi kommer att härleda fungerar även för funktioner med andra baser, d.v.s. funktioner på formen $f(x) = a^x$ för $a \neq e$, men vi kommer huvudsakligen att hålla oss till e^x.

För exponenter som är naturliga tal vet vi vad e^x borde betyda. För $n \in \mathbb{N}$ definierar vi

$$e^n = \underbrace{e \cdot e \cdot \ldots \cdot e}_{n \text{ st}}.$$

e^0 definierar vi till 1 (detta följer av att vi kan tänka oss e^n som en etta multiplicerad med n stycken e). Det är enkelt att inse följande räknelagar.

Räknelagar 5.1 *För två naturliga tal a och b gäller*

(1) $$e^a e^b = e^{a+b}$$

och, om $a \geqslant b$

(2) $$e^a / e^b = e^{a-b}.$$

Av detta följer att

(3) $$(e^a)^b = e^{ab}.$$

Av dessa lagar följer att det är naturligt att definiera e^a för negativa a som $\frac{1}{e^{-a}}$. Eftersom $-a$ är positivt blir detta ett begripligt uttryck.

Vi skulle dock vilja definiera funktionen e^x för godtyckliga reella exponenter. Vi börjar med att titta på vad som händer om exponenterna är rationella och går därefter över till det reella fallet.

Definition 5.2 *För positiva heltal q definierar vi $e^{1/q}$ till att vara det positiva tal a sådant att $a^q = e$.*

Det är kanske inte uppenbart att ett sådant tal finns, och inte heller att det bara finns ett sådant positivt tal.

Sats 5.3 *Det finns ett tal $a \in \mathbb{R}$ så att $a^q = e$. Detta tal är unikt.*

Bevis Låt $A = \{x \in \mathbb{R} : x^q \leqslant e\}$. Om det finns ett tal $a \in A$ så att $a^q = e$ så är vi klara. Betrakta annars $b = \sup A$. Om $b^q < e$ vill vi finna något tal $\varepsilon > 0$ så att $(b + \varepsilon)^q < e$. I så fall är inte b supremum till A, eftersom det finns större tal ($b + \varepsilon$, till exempel) som ligger i A.

Man visar lätt att, om $a > b \geqslant 0$,

$$a^q - b^q = (a-b)(a^{q-1} + a^{q-2}b + a^{q-3}b^2 + \ldots + b^{q-1}) < (a-b)qa^{q-1}.$$

Om vi sätter in $a = b + \varepsilon$ får vi

$$(b+\varepsilon)^q - b^q < (b+\varepsilon-b)q(b+\varepsilon)^{q-1} = \varepsilon q(b+\varepsilon)^{q-1}.$$

Eftersom ε kan väljas mindre än b får vi

$$(b+\varepsilon)^q - b^q < \varepsilon q(2b)^{q-1}.$$

Vi väljer nu

$$\varepsilon = \min\left(b\ ,\ \frac{e-b^q}{q(2b)^{q-1}}\right),$$

vilket ger

$$(b+\varepsilon)^q - b^q < e - b^q \Leftrightarrow (b+\varepsilon)^q < e.$$

Vi har därmed funnit det tal a vi sökte.

På samma sätt kan man visa att om $b^q > e$ så finns det ett tal $b - \varepsilon$ så att $(b-\varepsilon)^q > e$. Då kan inte b vara supremum av A, eftersom det inte är den *minsta* övre begränsningen. Vi inser alltså att $b^q = e$.

Att det tal vi funnit är unikt är lätt att inse, eftersom $0 \leqslant a < b \Rightarrow a^q < b^q$. □

Vi kan nu definiera exponentialfunktionen för rationella exponenter.

Definition 5.4 *Låt $x = p/q$ vara ett rationellt tal $(p, q \in \mathbb{N}, q > 0)$. Vi definierar då*

$$e^x = e^{\frac{p}{q}} = (e^{1/q})^p.$$

Kommentar 5.5 *Varje bråk kan skrivas på oändligt många sätt. Om definitionen ovan ska vara meningsfull ska alla dessa sätt ge samma resultat. Det är dock inte särskilt svårt att visa och lämnas som en övning.*

Vi kan kontrollera att räknelagarna 5.1 stämmer även för rationella exponenter. Vi visar detta i första fallet, och lämnar övriga fall som en övning. Vi antar här $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, q och s större än 0.

$$e^{\frac{p}{q}}e^{\frac{r}{s}} = e^{\frac{ps}{qs}}e^{\frac{qr}{qs}} = (e^{1/qs})^{ps}(e^{1/qs})^{qr} = (e^{1/qs})^{ps+qr} = e^{\frac{ps+qr}{qs}} = e^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

Vi har här använt första räknelagen för heltalsexponenter.

Det kan nu vara lämpligt att visa att exponentialfunktionen $e^x : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ är strängt växande och kontinuerlig. Med strängt växande menas att $x_1 < x_2$ medför att $e^{x_1} > e^{x_2}$. Vi börjar med växandet.

Vi vill visa att $x > y \Rightarrow e^x > e^y$. Skriv x och y så att de har gemensam positiv nämnare. Vi får då

$$x = \frac{p}{q} > \frac{r}{q} = y \implies p > r.$$

Det är då enkelt att inse att

$$e^x = (e^{1/q})^p > (e^{1/q})^r = e^y,$$

eftersom $e^{1/q} > 1$ (annars fick vi $e = (e^{1/q})^q \leqslant 1^q = 1$, vilket inte stämmer).

Exponentialfunktionen är således strängt växande för rationella exponenter.

För att visa att den är kontinuerlig räcker det att visa att om vi varierar exponenten lite så ändras inte heller funktionsvärdet särskilt mycket. Om vi kan visa det har vi uppnått att för alla $\varepsilon > 0$ kan vi välja $\delta > 0$ så att $|x - a| < \delta \Rightarrow |e^x - e^a| < \varepsilon$. Därmed har vi visat att e^x är kontinuerlig i a.

Låt $\varepsilon > 0$ vara godtyckligt och antag $|x - a| < \delta$. Vi vill finna hur litet vi måste göra δ för att uppfylla $|e^x - e^a| < \varepsilon$. Vi får då, för $x > a$

$$|e^x - e^a| = |e^{a+(x-a)} - e^a| = |e^a(e^{x-a} - 1)| < e^a(e^\delta - 1)$$

(fallet $x < a$ lämnas som en övning). Vi måste förvissa oss om att vi kan göra $e^a(e^\delta - 1)$ mindre än ε. Detta uppnås om $e^\delta - 1 < \frac{\varepsilon}{e^a}$ eller $e^\delta < 1 + \frac{\varepsilon}{e^a}$. Från binomialsatsen inser vi att

$$(1+\eta)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \eta^k > 1 + m\eta.$$

Olikheten fås genom att bara ta med två termer i summan (övriga termer är positiva). Genom att välja m så att $(1 + \frac{\varepsilon}{e^a})^m > 1 + m\frac{\varepsilon}{e^a} > e$ och $\delta = 1/m$ får vi att

$$e^{m\delta} = e < (1 + \frac{\varepsilon}{e^a})^m \Rightarrow e^\delta < 1 + \frac{\varepsilon}{e^a}.$$

Vi har nu funnit ett $\delta > 0$ som uppfyller villkoren ovan. Detta gjordes för godtyckligt $\varepsilon > 0$. Därav följer nu kontinuiteten.

För att nu utöka definitionen av $f(x) = e^x$ till samtliga reella exponenter x definierar vi

$$e^x = \sup_{y \in \mathbb{Q},\ y \leqslant x} e^y.$$

För rationella x ges detta supremum naturligtvis av e^x (eftersom $y < x \Rightarrow e^y < e^x, y \in \mathbb{Q}$).

Man kan nu visa att räknelagarna även gäller för godtyckliga reella exponenter enligt definitionen ovan. Även detta visar vi bara för första räknelagen.

Vi vill visa att $e^x e^y = e^{x+y}$. Det är samma sak som att visa

$$\sup_{z_1 \leqslant x} e^{z_1} \sup_{z_2 \leqslant y} e^{z_2} = \sup_{z_3 \leqslant x+y} e^{z_3}.$$

(Vi antar hela tiden att z_1, z_2 och z_3 är rationella.) Vi kan flytta ihop exponentialfunktionerna på vänstersidan. Vi får

$$\sup_{z_1 \leqslant x,\ z_2 \leqslant y} e^{z_1 + z_2} = \sup_{z_3 \leqslant x+y} e^{z_3}.$$

Vi kan nu definiera mängderna $A = \{e^{z_3} : z_3 \leqslant x + y\}$ och $B = \{e^{z_1+z_2} : z_1 \leqslant x, z_2 \leqslant y\}$. Likheten kan nu skrivas

$$\sup B = \sup A.$$

Det är uppenbart att varje element i B även finns i A, eftersom $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}$ och $z_1 \leqslant x, z_2 \leqslant y$ medför $z_1 + z_2 \in \mathbb{Q}$ och $z_1 + z_2 \leqslant x + y$. Man kan även visa att givet $z_3 \in \mathbb{Q}, z_3 \leqslant x + y$ finns $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}$ så att $z_3 = z_1 + z_2, z_1 \leqslant x$ och $z_2 \leqslant y$. Därmed finns varje element i A även i B, så $A = B$, vilket ger

$$\sup B = \sup A.$$

Vi kan nu begrunda egenskaperna för funktionen $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Det är lätt att se att den, liksom i det rationella fallet, är växande. För att visa att den är strängt växande gör vi så här: Låt $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Då finns två rationella tal a och b så att $x < a < b < y$. Eftersom exponentialfunktionen är strängt växande över rationella exponenter och växande över reella exponenter får vi

$$e^x \leqslant e^a < e^b \leqslant e^y.$$

Exponentialfunktionen är alltså strängt växande även över reella exponenter.

Att exponentialfunktionen är kontinuerlig inses av kontinuiteten i det rationella fallet samt av att funktionen är strängt växande. Givet att vi vill ha $|e^x - e^a| < \varepsilon$ kan vi använda samma δ som i det rationella fallet och se att det räcker att $|x - a| < \delta$ för att uppfylla kravet.

Vi betraktar nu exponentialfunktionen $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, där $f(x) = e^x$. Eftersom den är strängt växande är den injektiv. Eftersom den är kontinuerlig, avtar mot 0 då x avtar mot $-\infty$ och växer mot ∞ då x växer mot ∞ (se övning 5.4), så är den också surjektiv. Därmed är den bijektiv och har en invers. Denna invers ska vi beskriva i nästa avsnitt.

Övning 5.1 *Visa att, för exponenter i $\mathbb{N}$, räknelag 3 följer av räknelag 1. Visa även att räknelag 2 gäller för rationella exponenter.*

Övning 5.2 *Visa att definitionen av exponentialfunktionen för rationella exponenter är vettig, d.v.s. att för rationell exponent $x = p/q = r/s$ har vi $(e^{1/q})^p = (e^{1/s})^r$*

Ledning: Det räcker att visa att

$$((e^{1/q})^p)^{qs} = ((e^{1/s})^r)^{qs}$$

eftersom qs är ett heltal. Observera att du får bara använda räknereglerna för heltalsexponenter och definitionen av $e^{1/q}$.

Övning 5.3 *Visa att räknelag 3 gäller för rationella exponenter.*

Ledning: Eftersom

$$((e^q)^{1/q})^q = e^q$$

(detta fås genom att definitionen för $e^{1/q}$ *generaliseras till andra baser än* e*) inser vi att*

$$(e^q)^{1/q} = e.$$

Övning 5.4 *Visa att*

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

och att

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

6 Logaritmfunktionen och standardgränsvärden

Vi vet nu att funktionen $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ sådan att $f(x) = e^x$ är bijektiv, vilket medför att en invers finns.

Definition 6.1 *Inversen till exponentialfunktionen $f(x) = e^x$ kallas* **logaritmfunktionen** *och betecknas $f^{-1}(y) = \ln y$.*

Logaritmfunktionen är definierad på exponentialfunktionens värdemängd, vilket är $(0, \infty)$ och dess värdemängd sammanfaller med exponentialfunktionens definitionsmängd.

Intressant är hur $\ln$ verkar på produkter. Låt $x, y > 0$, vi har

$$e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}.$$

Eftersom exponentialfunktionen är injektiv får vi att

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Antag att $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$ och att $y = \ln x$ (d.v.s. $x = e^y$). Då följer att

$$x^a = (e^y)^a = e^{ay}$$

vilket ger

$$\ln x^a = \ln e^{ay} = ay = a \ln x.$$

Vi har även för $x, y > 0$ att

$$\ln x - \ln y = \ln x + \ln y^{-1} = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln \frac{x}{y}.$$

Vi sammanfattar ovanstående räknelagar.

Räknelagar 6.2 *Låt $x, y > 0$ och $a \in \mathbb{R}$ då gäller att*

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
2. $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
3. $\ln x^a = a \ln x$

Sats 6.3 *Låt funktionen $f : I_1 \to I_2$ där I_1 och I_2 är intervall vara bijektiv, strängt växande och kontinuerlig, då följer att inversen $f^{-1} : I_2 \to I_1$ är strängt växande och kontinuerlig.*

Bevis För att visa att f^{-1} är strängt växande antar vi att $x > y$ och att $x, y \in I_2$. Vi vill visa att $f^{-1}(x) > f^{-1}(y)$. Antag att $f^{-1}(x) \leqslant f^{-1}(y)$. Då f är strängt växande följer att $x = f(f^{-1}(x) \leqslant f(f^{-1}(y) = y$ och vi har en motsägelse. Alltså är f^{-1} strängt växande.

Vi visar att f^{-1} är kontinuerlig i en godtycklig punkt $x_0 \in I_2$ och därmed kontinuerlig för alla $x \in I_2$. Vi observerar att för $x \in I_2$ sådan att $x < x_0$ är $f^{-1}(x)$ uppåt begränsad av $f^{-1}(x_0)$ och dessutom växande. Fran kapitel 3 vet vi att vänstergränsvärdet

$$\lim_{x \to x_0-} f^{-1}(x)$$

existerar. På samma sätt kan vi visa att högergränsvärdet existerar i x_0 eftersom f^{-1} är avtagande då $x \to x_0+$ och nedåt begränsad av $f^{-1}(x_0)$. Vi har att

$$\lim_{x \to x_0-} f^{-1}(x) \leqslant f^{-1}(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0+} f^{-1}(x).$$

Vi utför ett motsägelsebevis för att visa att här råder likhet. Låt

$$A = \lim_{x \to x_0-} f^{-1}(x)$$

och antag att $A < f^{-1}(x_0)$. Låt $B = \frac{A+f^{-1}(x_0)}{2}$, d.v.s. medelvärdet av A och $f^{-1}(x_0)$. Vi inser nu att det ej kan finnas något $x < x_0$ som avbildas på B, ty för dessa x gäller att $f^{-1}(x) \leqslant A < B$. Vi vet att $f^{-1}(x_0) > B$ och att $f^{-1}(x) > B$ för $x > x_0$ eftersom f^{-1} är strängt växande. Slutsatsen är att det ej finns något x som avbildas på B. Detta strider mot att $V_{f^{-1}} = D_f = I_1$ är ett intervall, alltså är f^{-1} kontinuerlig. □

Följdsats 6.4 *Funktionen $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = lnx$ är strängt växande och kontinuerlig.*

Bevis Tag $I_1 = \mathbb{R}$ och $I_2 = (0, \infty)$ i föregående sats. Vi vet från kapitel 5 vet vi att $x \mapsto e^x$ är bijektiv, strängt växande och kontinuerlig. □

Vi ska nu visa några viktiga standardgränsvärden.

Lemma 6.5

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

Bevis

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{t}\ln(1+t) = \ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

Låt oss utföra variabelbytet $\frac{1}{t} = s$. Gränsvärdet $t \to 0$ kommer att sammanfalla med $s \to \pm\infty$. Vi får då vi vet att logaritmfunktionen är kontinuerlig att

$$\lim_{s \to \pm\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s \right) = \ln \left(\lim_{s \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s \right) = \ln e = 1.$$

□

Lemma 6.6

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

BEVIS Låt oss direkt utföra variabelbytet $e^t - 1 = s$, vilket ger $t = \ln(1+s)$

$$\frac{e^t - 1}{t} = \frac{s}{\ln(1+s)} \to 1, \text{ då } s \to 0 \text{ (vilket är detsamma som } t \to 0).$$

□

Nu kan vi äntligen konstatera att vi valt en bra bas för vår exponentialfunktion.

Sats 6.7

1.

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

2.

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

BEVIS Vi använder derivatans definition

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Även den andra likheten följer från tidigare lemma

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \left[\frac{h}{x} = t\right] = \frac{1}{x}\frac{\ln(1+t)}{t} \to \frac{1}{x},$$

då $t \to 0$. □

Övning 6.1 *Man kan definiera logaritmfunktioner hörande till andra funktioner än $x \mapsto e^x$. Antag att $a > 0$ och låt oss definiera $x \mapsto \log_a x$ som inversfunktionen till $x \mapsto e^x$, d.v.s.*

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

Visa att $\log_b x = \log_b a \log_a x$.

Övning 6.2 *Visa att då $a > 0$ följer att*

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a.$$

Övning 6.3 *Lös ekvationen*

$$\log_3 x^2 = \frac{1}{3}.$$

Övning 6.4 *Visa att*

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2}.$$

7 Taylors formel och alternativ definition av talet e

Vi ska börja med att visa en nyttig formel vid integration. Låt f och g vara två kontinuerliga funktioner definierade på intervallet $[a, b]$, där g är deriverbar och F en primitiv funktion till f. Då följer via produktlagen för derivation att

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)\,g(x)\right) = f(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x).$$

Vi integrerar höger- och vänsterled,

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(F(x)\,g(x)\right) dx = \int_a^b \big(f(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x)\big)\, dx.$$

Efter förenkling får vi

$$\left[F(x)\,g(x)\right]_a^b = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx.$$

Vi sammanfattar resultatet som kallas partiell integration i ett lemma.

Lemma 7.1 *Låt f och g vara kontinuerliga funktioner definierade på intervallet $[a, b]$ och g vara deriverbar. Då följer att*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \left[F(x)\,g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx.$$

Exempel 7.2 *Låt oss bestämma en primitiv funktion till funktionen $f(x)$.*

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

D.v.s. $F(x) = x \ln x - x + C$ är en primitiv funktion till f.

Sats 7.3 *Låt f och g vara kontinuerliga funktioner i intervallet $[a, b]$ och g vara sådan att $g \geqslant 0$ eller $g \leqslant 0$ i intervallet. Då finns $s \in (a, b)$ sådant att*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(s) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Bevis Om $g(x) = 0$ för alla $x \in [a, b]$ så kan s väljas godtyckligt (varför?). Antag nu att $g(x) \neq 0$ för någon punkt i $[a, b]$. Låt oss studera fallet då $g \geqslant 0$ (fallet då $g \leqslant 0$ kan vi överföra på det positiva fallet genom att studera $-g$). Låt

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x) \text{ och } m = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Då gäller att

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

och

$$m g(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant M g(x).$$

Vi integrerar över intervallet $[a, b]$ och får

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx.$$

Då g inte är nollfunktionen får vi

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Eftersom f antar alla värden mellan m och M finns ett $s \in (a, b)$ sådant att

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(s) \int_a^b g(x)\,dx.$$

$\square$

Vi ska nu visa den viktiga Taylors formel, som har stora tillämpningar inom funktionsläran. Den talar om hur funktioner uppför sig lokalt kring någon punkt genom en jämförelse med ett polynom (det s.k. Taylorpolynomet).

Sats 7.4 *Låt f vara en funktion som är definierad på hela $\mathbb{R}$ sådan att de n första derivatorna är kontinuerliga funktioner. Då följer att*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^n(\alpha)}{n!} x^n$$

för något $\alpha \in (0, x)$. Termen

$$R_n(x) = \frac{f^n(\alpha)}{n!} x^n$$

kallas för resttermen.

Bevis Vi vet att

$$\int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0).$$

Detta kan skrivas om till

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = f(0) + \int_0^x 1 \cdot f'(t)\,dt \\
&= f(0) + [(t-x) f'(t)]_0^x - \int_0^x (t-x) f''(t)\,dt \\
&= f(0) + f'(0)\,x - \left(\left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \right) \\
&= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \\
&= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \left[\frac{(t-x)^3}{3!} f^{(3)}(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!} f^{(4)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Om vi fortsätter på samma sätt får vi

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+(-1)^{n-1}\int_0^x\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt.$$

Vi tillämpar nu medelvärdessatsen för integraler med

$$g(t)=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\geqslant 0,\text{ då } t\in(0,x).$$

Vi får för något $\alpha\in(0,x)$ att

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+f^{(n)}(\alpha)\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}x^n.\end{aligned}$$

□

Låt $\{a_k\}$, $k\in\mathbb{N}$ vara en talföljd. Antag att vi är intresserade av att beräkna summan av dessa tal, d.v.s.

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a_k.$$

Det är emellertid inte självklart hur man ska gå till väga för att utföra denna addition. Vi definierar

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k.$$

Exempel 7.5 *Låt oss studera Taylorpolynomet till $f(x)=e^x$. Vi vet att $f^{(k)}(x)=e^x$ för alla $k=1,2,3,\ldots$ och $f^{(k)}(0)=1$ för alla $k=1,2,3,\ldots$. Vi får för $\alpha\in(0,x)$ att*

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+e^{\alpha}\frac{x^n}{n!}.$$

En intressant sak är att för varje givet x blir resttermen mindre och mindre då vi ökar n. Vi bildar skillnaden

$$\begin{aligned}e^x-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!} &= \lim_{n\to\infty}\left(e^x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right)=\lim_{n\to\infty}R_n(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}e^{\alpha}\frac{x^n}{n!}\leqslant\lim_{n\to\infty}e^x\frac{x^n}{n!}=e^x\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0.\end{aligned}$$

Vi har fått en alternativ definition av exponentialfunktionen

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Talet e som vi definierade enligt

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

kan alternativt definieras som

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Exempel 7.6 *Låt $f(x) = \cos x$. Då får vi Taylorutvecklingen*

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - ... + (-1)^n \frac{f^{(2n)}(\alpha)}{(2n)!}x^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + (-1)^n\frac{f^{(2n)}(\alpha)}{(2n)!}x^{2n}.\end{aligned}$$

Även för $f(x) = \cos x$ blir resttermen liten för stora n.

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \to 0, \text{ då } n \to \infty.$$

Vi får identiteten

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

På samma sätt kan vi visa att

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Exponentialfunktionen har ett samband med de trigonometriska funktionerna sinus och cosinus. För att kunna visa detta använder vi oss av komplexa tal. Vi börjar med att utöka vår definitionsmängd för exponentialfunktionen till komplexa talplanet.

Definition 7.7 *Låt θ vara ett reellt tal. Då definieras*

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^k}{k!}.$$

Vi måste visa att då $i\theta \in \mathbb{R}$, sammanfaller denna definition med den ursprungliga. Detta inses då $i\theta \in \mathbb{R}$ om och endast om $\theta = 0$. Då $\theta \neq 0$ måste (bör) vi verifiera att den oändliga summan verkligen konvergerar. Det följer av liknande räkningar som för Taylorutvecklingen av e^x.

På gymnasiet har ni troligen undervisats att $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ är en definition (vilket man ju också kan ha). Men vi har valt att definiera $e^{i\theta}$ med hjälp av Taylorutvecklingen, vilket vi tycker är mer intuitivt. Självklart borde den typiska gymnasiedefinitionen vara en följd av vår definition, vilket också stämmer.

Sats 7.8 *Låt θ vara ett reellt tal. Då följer att*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

BEVIS Vi använder definitionen av $e^{i\theta}$, Taylorutvecklingarna av $\cos\theta$ och $\sin\theta$ samt att $i^{k+4m} = i^k$ för alla heltal k och m

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k\theta^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i^{2k}\theta^{2k}}{(2k)!} + \frac{i^{2k+1}\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \theta^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \theta^{2k+1} \\
&= \cos\theta + i\sin\theta.
\end{aligned}$$

□

Detta var allt vi ville förmedla.

Övning 7.1 *Visa att Taylorutvecklingen av $f(x) = \sin x$ är*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots.$$

Övning 7.2 *Visa att då $x \in (-1, 1)$ följer att*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Övning 7.3 *Visa att $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ med hjälp av formeln*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Övning 7.4 *Visa Eulers formler, d.v.s. att*

1.
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

2.
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$