Cliffordalgebra
Spingeometri och Killingspinorfält

1 Inledning

Dessa anteckningar följer [2], men med annan notation och mycket färre detaljer.

2 Spinrepresentation

Vi kommer hela tiden arbeta med Cliffordalgebran $\mathcal{C}l(\mathbb{R}^{0,n})$, det vill säga ett negativt definit rum.

$\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{Spin}(0, n)$. Representation $\Delta_n^{\mathbb{C}}\colon \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ given som restriktion av

$$\mathrm{Spin}(n) \subseteq \mathcal{G}^+(\mathbb{R}^{0,n}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}^{0,n}) \otimes \mathbb{C} \cong \mathcal{G}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\Sigma)$$

där ρ är en irreducibel representation av $\mathcal{G}(\mathbb{C}^n)$.

3 Spinstruktur och spinorbuntar

Tangentbunten $TM \to M$ består av fibrer $T_pM \cong \mathbb{R}^n$, en för varje punkt $p \in M$:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Vi vill bygga en spinorbunt $\Sigma M \to M$, med fibrer $\Sigma_p M \cong \Sigma$.

$$\Sigma M = \bigcup_{p \in M} \Sigma_p M.$$

Vi arbetar hela tiden med Riemannmångfalder, det vill säga en mångfald M tillsammans med en *metrik* g. Metriken g är en (positivt definit) inre produkt på varje T_pM. Vi arbetar bara med mångfalder som är orienterbara.

Exempel på en icketrivial vektorbunt: Möbiusbunten på S^1.

För att konstruera spinorbunten ΣM tar man en omväg via *rambunten* och en *spinstruktur*:

$$\begin{tikzcd}
\text{Tangentbunt } TM \arrow[d, squiggly] & \text{Spinorbunt } \Sigma M \\
\text{Rambunt } P_{\mathrm{SO}(n)} \arrow[r, squiggly] & \text{Spinstruktur } P_{\mathrm{Spin}(n)} \arrow[u, squiggly]
\end{tikzcd}$$

Definition 1. Rambunten till (M, g) är (principal-)bunten $P_{\mathrm{SO}(n)}$ vars fiber i $p \in M$ är

$$P_{\mathrm{SO}(n),p} = \{\text{orienterade ortonormala baser } (e_1, \ldots, e_n) \text{ för } T_pM\}.$$

Notera att $P_{\mathrm{SO}(n),p} \cong \mathrm{SO}(n)$.

Minns att det finns en 2-bladad övertäckning $\widetilde{\mathrm{Ad}}\colon \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$. En *spinstruktur* är en global version av denna:

Definition 2. En *spinstruktur* för M är en bunt $P_{\mathrm{Spin}(n)} \to M$ tillsammans med en 2-bladad övertäckning

$$P_{\mathrm{Spin}(n)} \to P_{\mathrm{SO}(n)}$$

så att följande diagram kommuterar för varje $p \in M$:

$$\begin{tikzcd}
P_{\mathrm{Spin}(n),p} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & P_{\mathrm{SO}(n),p} \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] \\
\mathrm{Spin}(n) \arrow[r, "\widetilde{\mathrm{Ad}}"] & \mathrm{SO}(n).
\end{tikzcd}$$

Det finns inte alltid en spinstruktur, och den behöver inte vara unik, men vi förutsätter från och med nu att vi har valt en spinstruktur för alla våra mångfalder.

Definition 3. Spinorbunten ΣM definieras av

$$\Sigma M = P_{\mathrm{Spin}(n)}(M) \times_{\Delta_n^{\mathbb{C}}} \Sigma.$$

Denna notation innebär att vi har kvotat med verkan av $\mathrm{Spin}(n)$ genom (fibervis) multiplikation respektive genom representationen $\Delta_n^{\mathbb{C}}$.

Detta är analogt med att

$$TM = P_{\mathrm{SO}(n)} \times_{\mathrm{SO}(n)} \mathbb{R}^n.$$

4 Parallella spinorfält

4.1 Förbindelser och holonomi

Ett spinorfält är en funktion

$$\psi\colon M \to \Sigma M$$

så att $\psi(p) \in \Sigma_p M$.

En Riemannmetrik ger en Levi-Civita-förbindelse som lyfts till en förbindelse på ΣM. Denna låter oss beräkna ”riktningsderivator”

$$\nabla_X \psi$$

där $X \in TM$ och ψ är ett spinorfält. Notera: Detta är inte Diracoperatorn. Förbindelsen har en vektor och ett spinorfält som indata, medan Diracoperatorn bara har spinorfältet.

Genom $\nabla_{\dot\gamma}\psi = 0$ kan vi parallellförflytta spinorer längs med kurvor.

Exempel 4. Parallellförflyttning av vektorer längs två olika kurvor på $\mathbb{R}^n$.

Exempel 5. Parallellförflyttning av vektorer längs två olika kurvor på en sfär.

Vi ser en skillnad mellan sfären och $\mathbb{R}^n$ i detta avseende:

Definition 6. Låt M vara en sammanhängande sluten mångfald. Betrakta mängden av slutna kurvor med baspunkt p. Parallellförflyttning av en vektor ett varv runt ger ett element i $SO(n)$. Gruppen av dessa är $\mathrm{Hol}(TM)$.

På samma sätt ger parallellförflyttning av en spinor ett varv runt ett element i $\mathrm{Spin}(n)$ och gruppen av sådana element är holonomin för spinbunten, $\mathrm{Hol}(\Sigma M)$.

Om M är enkelt sammanhängande blir dessa holonomigrupper sammanhängande.

Sats 7. Bergers klassifikation av möjliga holonomigrupper för mångfalder som är enkelt sammanhängande (och inte är symmetriska eller en produkt):

$\mathrm{Hol}(TM)$	$\dim(M)$	Extra struktur	Ricci-plan
$\mathrm{SO}(n)$	n	Orienterbarhet	Nej
$\mathrm{U}(n)$	$2n$	Kähler	Nej
$\mathrm{SU}(n)$	$2n$	Calabi–Yau	Ja
$\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$	$4n$	Quaternion-Kähler	Nästan: Einstein
$\mathrm{Sp}(n)$	$4n$	Hyperkähler	Ja
G_2	7	G_2	Ja
$\mathrm{Spin}(7)$	8	$\mathrm{Spin}(7)$	Ja

Definition 8. Om $\nabla_X\psi = 0$ för alla X är ψ ett *parallellt* spinorfält.

Man kan visa att om det finns en parallell spinor så är mångfalden Ricci-plan:

$$\mathrm{Ric} = 0.$$

Det som är kvar i ovanstående lista om mångfalden är Ricci-plan är följande:

$\mathrm{Hol}(TM)$	$\dim(M)$	Extra struktur	Ricci-plan
$\mathrm{SU}(n)$	$2n$	Calabi–Yau	Ja
$\mathrm{Sp}(n)$	$4n$	Hyperkähler	Ja
G_2	7	G_2	Ja
$\mathrm{Spin}(7)$	8	$\mathrm{Spin}(7)$	Ja

5 Killingspinorer

Definition 9. Ett spinorfält ψ är ett *Killingspinorfält* om det finns $\mu \in \mathbb{C}$ så att

$$\nabla_X \psi = \mu X \cdot \psi$$

för alla vektorer X. Här är $X \cdot \psi = \Delta_n^{\mathbb{C}}(X)(\psi)$ där $\Delta_n^{\mathbb{C}} \colon \mathbb{R}^{0,n} \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}^{0,n}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{C}^n) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ är den representation vi valt. Konstanten μ kallas spinorfältets *Killingtal.*

Man kan visa att om M har ett Killingspinorfält med Killingtal μ så är dess Ricci-krökning

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = 4\mu^2(n-1)g(X, Y).$$

Alltså är M en Einstein-mångfald. Om vi tar spåret ser vi att dess skalärkrökning (som måste vara reell) är

$$s = 4\mu^2 n(n-1)$$

vilket innebär att $\mu \in \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$. Alltså kan vi dela in Killingspinorer i två typer: De med reella Killingtal och de med imaginära Killingtal.

5.1 Bärs konkonstruktion

Killingspinorer kan användas ([1, Theorem 1]) för att avgöra om mångfalden är en sfär:

Sats 10. Låt M vara en fullständig sammanhängande Riemann-mångfald. Antag att $\dim(M)$ är jämn och att $\dim(M) \neq 6$. Antag att M har ett Killingspinorfält med reellt och nollskilt Killingtal. Då är M en rund sfär.

Bevisidé: Genom att skala om metriken på M kan vi anta att $\mu = \pm\frac{1}{2}$. Bilda $\overline{M} = M \times \mathbb{R}^+$ med metrik

$$\overline{g} = r^2 g + dr^2.$$

Detta blir i allmänhet ett slags kon. I fallet att M är precis en rund sfär ger denna konstruktion $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ med den plana metriken, och vice versa.

Det finns en relation mellan spinstrukturerna för M och $\overline{M}$ som bygger på följande relation mellan $\mathrm{Spin}(n)$ och $\mathrm{Spin}(n+1)$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}l(0,n) & \cong & \mathcal{C}l_0(0,n+1) \\
\cup\!\! | & & \cup\!\! | \\
\mathrm{Spin}(n) & \subseteq & \mathrm{Spin}(n+1)
\end{array}$$

Här använder vi att vi har negativt definit signatur för Cliffordalgebran.

Konen $\overline{M}$ har också en förbindelse, som vi kallar $\overline{\nabla}$. Låt $e_1, \ldots, e_n$ vara en ortonormal bas för M. Låt

$$\overline{e}_0 = \partial_r,$$

$$\bar{e}_i = \frac{1}{r} e_i \text{ för } i > 0.$$

Man kan visa att om ψ är ett spinorfält på $\overline{M}$ så gäller för $i > 0$ att

$$\overline{\nabla}_{\bar{e}_i} \psi = \nabla_{e_k} \psi + \frac{1}{2} (\bar{e}_0 \bar{e}_i) \cdot \psi.$$

Om ψ nu är ett Killingvektorfält med Killingtal $\mu = \pm 1/2$ har vi alltså

$$\overline{\nabla}_{\bar{e}_i} \psi = \pm \frac{1}{2} e_i \cdot \psi + \frac{1}{2} (\bar{e}_0 \bar{e}_i) \cdot \psi.$$

Det finns två isomorfier $\mathcal{C}l(0, n) \cong \mathcal{C}l_0(0, n+1)$, där vi skickar e_i på antingen $e_0 e_i$ eller $-e_0 e_i$. Med rätt val har vi

$$\overline{\nabla}_{\bar{e}_i} \psi = 0.$$

Om vi utvidgar ψ parallellt i $\mathbb{R}^+$-riktningen får vi då ett parallellt spinorfält på konen $\overline{M}$.

Vi kan nu dra en slutsats om M. Eftersom M har ett Killingspinorfält är den en Einsteinmångfald. Det finns nu satser (Myers sats och Gallots sats) som säger att konen $(\overline{M}, \overline{g})$ är antingen plan eller irreducibel. Att den är irreducibel är enligt tabellen omöjligt om M har jämn dimension skild från 6. Alltså är M en rund sfär.

Referenser

[1] C. Bär. Real Killing spinors and holonomy. *Comm. Math. Phys.*, 154(3):509–521, 1993.

[2] J. Figueroa-O'Farrill. Spin geometry. https://empg.maths.ed.ac.uk/Activities/Spin/, 2010.