

## Dagens tema

- Mer om homogena linjära system med konstanta koefficienter:  
Fasplan(-rum), trajektorier, fasporträtt  
(ZC sid 340-1, ZC10.2)

Vi betraktar homogena linjära system *med konstanta koefficienter*.

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (\text{H})$$

Frågeställningar:

1° Vad händer med lösningarna  $\mathbf{X}(t)$  i det långa loppet?

(Dvs. vad kan sägas om  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{X}(t)|$ ?)

2° Kommer två lösningar  $\mathbf{X}_1(t)$  och  $\mathbf{X}_2(t)$  vars begynnelsevärden bara skiljer "litet" också ligga "nära" varandra i fortsättningen?

Den senare frågan är nära släkt med den förra.

Fråga 2 kan formuleras:

Om  $\mathbf{X}_1(t)$  och  $\mathbf{X}_2(t)$  är två lösningar för vilka

$$|\mathbf{X}_1(0) - \mathbf{X}_2(0)| < \epsilon \quad (\text{"litet tal"})$$

kommer då

$|\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t)|$  att vara  $< \epsilon_1$  (annat "litet tal")  
för alla  $t > 0$ ?

Notera att  $\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t)$  enligt superpositionsprincipen också är en lösning till systemet (H), så fråga 2 kan mera koncist formuleras:

Om för lösningen  $\mathbf{X}(t)$

$$|\mathbf{X}(0)| < \epsilon \quad (\text{"litet tal"})$$

kommer då

$|\mathbf{X}(t)|$  att vara  $< \epsilon_1$  (annat "litet tal")  
för alla  $t > 0$ ?

Obs att vi vet att alla lösningar till systemen (H) är linjära kombinationer av funktioner av formen

$$\mathbf{v} t^m e^{\lambda t},$$

där  $\mathbf{v}$  är en konstant vektor,  $m$  heltal  $\geq 0$ ,  $\lambda$  egenvärde.

För de fall då  $\lambda$  inte är reellt ( $= \alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ ) har motsvarande reella lösningar formen

$$\mathbf{v}_1 t^m e^{\alpha t} \sin \beta t \text{ och } \mathbf{v}_2 t^m e^{\alpha t} \cos \beta t.$$

Av detta kan man se t.ex. att

- om alla egenvärdenas realdelar  $< 0$ , så är  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = 0$  för *alla* lösningar och fråga 2 besvaras med ”ja”,
- för lösningar som innehåller termer som hör till egenvärden med realdel  $> 0$  är  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{X}(t)| = \infty$  och fråga 2 med ”nej” om  $\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t)$  innehåller termer med sådana egenvärden.

# Fasplan(-rum), trajektorier, fasporträtt

ZC sid 340-1, ZC10.2

## *Definitioner:*

Lösningarna  $X(t)$  till ett system av differentialekvationer av format  $n \times n$ , kan uppfattas som en med variabeln (tiden)  $t$  vandrande punkt i rummet  $\mathbf{R}^n$ , (jmf. begreppet "kurva på parameterform").

Detta rum är då systemets *fasrum* (*fasplan* om  $n = 2$ ) och lösningen sägs vara en *trajektoria* i detta rum. Den kurva som punkten beskriver är lösningens *bana* (eng. *orbit*). Mängden av alla banor utgör ekvationens *fasporträtt*.

(Obs: Trajektorierna beskriver den "resa" partikeln utför – den talar om var partikeln finns vid varje tidpunkt, medan banorna bara beskriver vägen som resan följer. Fasporträttet kan ses som en "karta" över vägnätet.)

Konstantlösningar motsvarar då lösningar vars banor består av en enda punkt. Dessa lösningar kallas systemets *jämviktslösningar* och dess bana är en *jämviktspunkt*.

Om systemdeterminanten  $\neq 0$ , så finns bara en jämviktslösning, den "triviala"  $X = \mathbf{0}$ .

Om  $\det A = 0$ , så finns det flera.