Lösningar till tenta 5B1207, 06 01 14

(1) Systemet är linjärt och kan skrivas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vi använder egenvärdesmetoden för att bestämma lösningarna:
Systemmatrisens egenvärden:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \iff \lambda = -1, 4$$

Motsvarande egenvektorer:

$$\lambda = -1 \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_1 + v_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4 \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2v_1 - 3v_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eftersom systemet är homogent så är den allmänna lösningen de linjära kombinationerna av $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$

<u>Svar:</u> $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + B \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$ där A, B är godt. konst.

---

(2) Vi använder Laplacetransformen: Man har

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)\,; \quad y'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

$$y''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s$$

$$\delta\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

varav

$$s^2 Y(s) - s + 2(sY(s) - 1) + 5Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

$$\iff (s^2 + 2s + 5)Y(s) = s + 2 + e^{-\pi/2\, s}$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+5} + \frac{1}{s^2+2s+5} \cdot e^{-\pi/2\, s}$$

Men $\dfrac{s+2}{s^2+2s+5} = \dfrac{s+2}{(s+1)^2+4} = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \dfrac{1}{(s+1)^2+2^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

(2 forts.) $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$

och

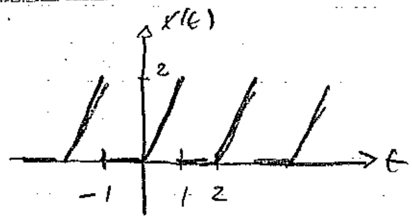
$$\frac{1}{s^2+2s+5}e^{-\pi/2 s} = \frac{1}{(s+1)^2+2^2}\cdot e^{-\pi/2 s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \left[\frac{1}{2}e^{-\tau}\sin 2\tau \cdot u(\tau)\right]_{\tau = t-\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-(t-\frac{\pi}{2})}\sin 2(t-\tfrac{\pi}{2})\,u(t-\tfrac{\pi}{2}) = -\frac{e^{\pi/2}}{2}\cdot e^{-t}\sin 2t\cdot u(t-\tfrac{\pi}{2})$$

Detta ger

Svar: $y(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\left(1 - e^{\pi/2}u(t-\frac{\pi}{2})\right)$

(3.) Vi har att $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t/L}$ och



$c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x(t)e^{-2\pi i n t/L}$, där $L=2$

I detta fall: $c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(|t|+t)e^{-i\pi n t}dt = \left| \begin{array}{l} |t|+t = 0 \text{ då } t<0 \\ |t|+t = 2t \text{ då } t>0 \end{array}\right|$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 2t\,e^{-i\pi n t}dt = \left[\text{partiell integration om } n\neq 0\right] =$

$= \left[t\,\frac{e^{-i\pi n t}}{-i\pi n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-i\pi n t}}{i\pi n}dt = \frac{e^{-i\pi n}}{-i\pi n} + \left[\frac{e^{-i\pi n t}}{\pi^2 n^2}\right]_0^1 =$

$= i\frac{(-1)^n}{\pi n} + \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$

För $n=0$ får man istället $c_0 = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$

Svar:

Fourierserien är: $\frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} + i\frac{(-1)^n}{\pi n}\right]e^{i\pi n t}$

Dess summa är $= x(t)$ om t är en kontinuitetspunkt, annars $= \frac{1}{2}(x(t+)+x(t-))$. För $t=1$ gäller (se fig ovan) $x(1-) = |1|+1 = 2$ och $x(1+) = 0$ varför seriesumman $= \frac{2+0}{2} = 1$ då $t=1$

(4) a. Enl. β har man

$$\frac{t}{a^2+t^2} \xrightarrow{FT} -i\pi \operatorname{sign}\omega \cdot e^{-a|\omega|}$$

detta kan också härledas ur det enklare:

$$\frac{1}{a^2+t^2} \xrightarrow{FT} \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{t}{a^2+t^2} = t \cdot \frac{1}{a^2+t^2} \xrightarrow{FT} i \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}\right) =$$

$$= i \cdot \frac{\pi}{a}\left(-a \operatorname{sign}\omega\right) e^{-a|\omega|} =$$

$$= -i\pi \operatorname{sign}\omega \cdot e^{-a|\omega|}$$

Svar: $X(\omega) = -i\pi \operatorname{sign}\omega \cdot e^{-a|\omega|}$

---

b. Enligt Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \left[\left| -i\pi \operatorname{sign}\omega \, e^{-a|\omega|} \right| = \pi e^{-a|\omega|} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|\omega|} d\omega = \pi \int_0^{\infty} e^{-2a\omega} d\omega = \pi \left[\frac{e^{-2a\omega}}{-2a} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2a}$$! Svar

---

(5.) Vi har

$$\operatorname{sinc} t \xrightarrow{FT} \operatorname{rect} f = \operatorname{rect} \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\operatorname{sinc}(t+a) \xrightarrow{FT} e^{a\omega} \operatorname{rect} \frac{\omega}{2\pi} \quad [1]$$

$$\operatorname{sinc}(t+a) * \operatorname{sinc}(t+b) \xrightarrow{FT} e^{a\omega} \operatorname{rect} \frac{\omega}{2\pi} \cdot e^{b\omega} \operatorname{rect} \frac{\omega}{2\pi} =$$

$$= \left[\text{obs } (\operatorname{rect} u)^2 = \operatorname{rect} u \right] = e^{(a+b)\omega} \operatorname{rect} \frac{\omega}{2\pi}$$

Men enl. [1] med a bytt mot a+b

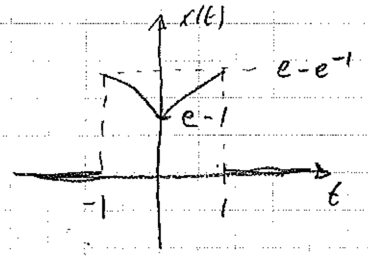
$$e^{(a+b)\omega} \operatorname{rect} \frac{\omega}{2\pi} \xrightarrow{FT^{-1}} \operatorname{sinc}(t+a+b),$$

alltså $\operatorname{sinc}(t+a) * \operatorname{sinc}(t+b) = \operatorname{sinc}(t+a+b)$,

dvs. $\operatorname{sinc}(t+a) * \operatorname{sinc}(t+b) - \operatorname{sinc}(t+a+b) = 0$

Svar: 0

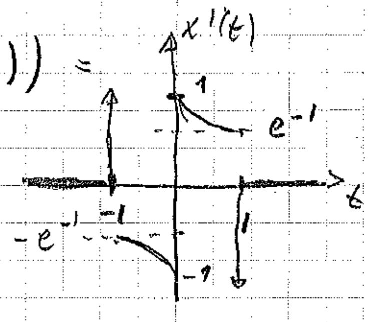
(6.) a. $x(t) = \begin{cases} e - e^{-|t|}, & |t|<1 \\ 0 & |t|\geq 1 \end{cases}$



Språng i $x=-1$, höjd $e-e^{-1}$ och
i $x=1$, höjd $-(e-e^{-1})$;

$$x'(t) = \begin{Bmatrix} e^{-|t|}\cdot \frac{d}{dt}|t|, & |t|<1 \\ 0, & |t|>1 \end{Bmatrix} + (e-e^{-1})(\delta(t+1)-\delta(t-1)) =$$

$$= \begin{Bmatrix} e^{-|t|}\,\mathrm{sign}\,t, & |t|<1 \\ 0, & |t|>1 \end{Bmatrix} + (e-e^{-1})(\delta(t+1)-\delta(t-1))$$



Språng i $x=-1$, $(-e^{-1})$; $x=0$, $(+2)$; $x=1$, $(-e^{-1})$.

$$x''(t) = \begin{Bmatrix} -e^{-|t|}, & |t|<1 \\ 0 & |t|>1 \end{Bmatrix} + (e-e^{-1})(\delta'(t+1)-\delta'(t-1)) - e^{-1}(\delta(t+1)+\delta(t-1)) + 2\delta(t)$$

~~Detta ger~~

Svar: $x''-x = \begin{Bmatrix} -e, & |t|<1 \\ 0, & |t|>1 \end{Bmatrix} + (e-e^{-1})(\delta'(t+1)-\delta'(t-1)) - e^{-1}(\delta(t+1)+\delta(t-1)) + 2\delta(t)$

---

b. Man har att: $x''-x \xrightarrow{FT} (i\omega)^2 X(\omega) - X(\omega) = -(\omega^2+1)X(\omega)$

Fouriertransformeras H.L. i svaret i a. termvis, så får man

$$\begin{Bmatrix} -e, & |t|<1 \\ 0, & |t|>1 \end{Bmatrix} = -e\cdot \mathrm{rect}\,\frac{t}{2} \xrightarrow{FT} -e\cdot 2\,\mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{\pi} = -2e\,\frac{\sin\omega}{\omega}$$

(ty $\mathrm{rect}\,t \xrightarrow{FT} \mathrm{sinc} f = \mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow$ [skalning] $\Rightarrow \mathrm{rect}\,\frac{t}{2} \xrightarrow{FT} 2\,\mathrm{sinc}\left(2\frac{\omega}{2\pi}\right)$)

$\delta(t) \xrightarrow{FT} 1$; $\delta(t+1)+\delta(t-1) \xrightarrow{FT} 2\cos\omega$

$\delta(t+1)-\delta(t-1) \xrightarrow{FT} 2i\sin\omega$;

$\delta'(t+1)-\delta'(t-1) = \frac{d}{dt}(\delta(t+1)-\delta(t-1)) \xrightarrow{FT} (i\omega)\,2i\sin\omega = -2\omega\sin\omega$

varav

$$-(\omega^2+1)X(\omega) = -2e\,\frac{\sin\omega}{\omega} + (e-e^{-1})(-2\omega\sin\omega) - e^{-1}\cdot 2\cos\omega + 2,$$

dvs.

Svar: $X(\omega) = 2e\,\frac{\sin\omega}{\omega(\omega^2+1)} + 2(e-e^{-1})\,\frac{\omega\sin\omega}{\omega^2+1} + 2e^{-1}\,\frac{\cos\omega}{\omega^2+1} - 2\,\frac{1}{\omega^2+1}$.

(7) a. Vi har villkoren

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0 \qquad [1]$$

och $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \ t > 0$ (isolerade ändar) [2], [3]

Ansats $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ ger enl [1]

$$X''T - XT = XT' \Rightarrow \frac{X'' - X}{X} = \frac{T'}{T} = k, \text{(oberoende av } x \text{ och } t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' - (k+1)X = 0, & [4] \\ T' - kT = 0 & [5] \end{cases}$$

och enligt [2], [3] (bortsett från den triviala möjligheten $T(t) = 0, t > 0$,

$$X'(0) = X'(\pi) = 0 \qquad [6], [7]$$

[4] har som allmän lösning

$$X = \begin{cases} A e^{\sqrt{k+1}\,x} + B e^{-\sqrt{k+1}\,x}, & \text{om } k+1 > 0 \\ A \cos\sqrt{-(k+1)}\,x + B \sin\sqrt{-(k+1)}\,x, & \text{om } k+1 < 0 \\ A + Bx, & \text{om } k+1 = 0 \end{cases}$$

Kombineras detta med villkoren [6] och [7] får man för fallet $k+1>0$ bara den triviala lösningen $X(x) = 0$.

För $k+1 < 0$: $X = A\cos\sqrt{-(k+1)}\,x$ där $\underbrace{\sqrt{-(k+1)}\,\pi = n\pi}_{\Leftrightarrow\ k = -1-n^2}$ $(n \geq 1)$

och för $k+1=0$ $X = A$

Motsvarande lösningar till ekv [5] är $T(t) = Ce^{kt} = Ce^{-t} \cdot e^{-n^2 t}$

Sammanfattningsvis:

Svar: Funktionerna

$$u(x,t) = A \cdot e^{-t} e^{-n^2 t} \cos nx \ ; \ n \geq 1$$

och $u(x,t) = A e^{-t}$

satisfierar villkoren

b. Eftersom villkoren [1], [2], [3] ovan är homogena så satisfieras "alla" linjära kombinationer av funktionerna i Svaret i a.:

(7 forts.) $$u(x,t) = A_0 e^{-t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-t} e^{-n^2 t} \cos nx$$

dessa villkor.

Begynnelsevillkoret $u(x,0) = f(x)$ är då uppfyllt om

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx \qquad 0 < x < \pi$$

V.L. är en 2π-periodisk cosinus-serie varför

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{och} \quad A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

Svar: $u(x,t) = e^{-t}\left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \cos nx \right)$

där $A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ och $A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$

---

c.) Vi har

$$u(x,0) = 2 + \cos 3x = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx$$

Identifikation av termerna i den senaste likheten ger

$$A_0 = 2, \; A_3 = 1 \text{ och övriga } A_n = 0$$

Alltså

Svar: $u(x,t) = e^{-t}\left(2 + e^{-9t}\cos 3t \right)$

(8) a. De stationära punkterna (konstantlösningarna) ges av $X' = 0$, dvs. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eftersom systemdeterminanten $= -3+5 \neq 0$, så är detta uppfyllt om och endast om $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Svar: Det finns bara en stationär punkt, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. Systemmatrisens egenvärden ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda)+5 = \lambda^2+2\lambda+2$$

$\Leftrightarrow \lambda = -1 \pm i$

Eftersom egenvärdenas realdelar är <0, så är $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en asymptotiskt stabil punkt. Eftersom vidare imaginärdelarna är $\neq 0$, så är det fråga om spiraler.

Svar: Asymptotiskt stabila spiraler

c. Egenvektorer:

För e.värdet $\lambda = -1+i$: $\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2-i)v_1 - v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$.

En komplex lösning till systemet är därför

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] e^{-t}(\cos t + i \sin t)$$

Eftersom det givna systemet är reellt så är också Re- och Im-delarna lösningar till systemet:

Re-del: $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin t\right] e^{-t}$

Im-del $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos t\right] e^{-t}$.

Dessa är linjärt oberoende (kolla t.ex. för $t=0$), varför

8 forts:

Systemets allmänna lösning är

Svar: $X = \left[A \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} \right] e^{-t}$

d. Eftersom $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ är den enda stationära punkten och den är asymptotisk stabil, så gäller för alla lösningar att $\lim_{t\to\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Detta syns också direkt av svaret i c ovan.)

Svar: Partikeln närmar sig $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.