Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen, 5B1207, Differentialekvationer II, för T2, den 14 januari 2006, kl 14.00 – 19.00

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, kompletterande formelblad för 5B1207, räknedosa.

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 14p, för betyget 4 minst 20p och för betyget 5 minst 26p

1. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 1, för övriga tillgodoräknas 3p*)

Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(t) + 3y(t) \\ 2x(t) + y(t) \end{pmatrix}$$ (3p)

2. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 2, för övriga tillgodoräknas 3p*)

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 1, y'(0) = 0$. $\delta(t)$ är Diracs deltafunktion. (3p)

3. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på bonusuppgiften, för övriga tillgodoräknas 3p*)

Bestäm den *komplexa* fourierserien till den 2-periodiska funktionen $x(t)$ om

$$x(t) = |t| + t, \text{ då } -1 < t < 1.$$

Bestäm vidare fourierseriens värde för $t = 1$. (3p)

4. a. Bestäm fouriertransformen till signalen $x(t) = \dfrac{t}{a^2 + t^2}$, a konstant > 0. (1p)

b. Bestäm signalens totala energiinnehåll, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$. (2p)

5. Låt $x_a(t) = \operatorname{sinc}(t + a)$. Förenkla

$$x_a(t) * x_b(t) - x_{a+b}(t)$$

så långt som möjligt. a och b är konstanter och $*$ betecknar fourierfaltning. (3p)

6. a. Beräkna på så enkel form som möjligt

$$x''(t) - x(t),$$

då

$$x(t) = \begin{cases} e - e^{-|t|}, & \text{då } |t| < 1, \\ 0, & \text{då } |t| > 1 \end{cases}$$

och x'' betecknar den generaliserade andraderivatan till x. (3p)

b. Beräkna t.ex. med ledning av svaret i a-uppgiften fouriertransformen till $x(t)$. (2p)

Var god vänd!

7. En smal värmeledande stav är isolerad i sina ändar men strålar ut värme radiellt. Ändarna är belägna i punkterna 0 respektive π på en x-axel. Det kan då visas att temperaturen $u(x,t)$ i punkten x vid tiden t uppfyller villkoret

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_o) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$

där h är en konstant och u_o är omgivningens temperatur. För enkelhets skull sätter vi $h = 1$ och $u_o = 0$.

a. Vilka temperaturförlopp av formen $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ uppfyller dessa villkor? (2p)

b. Om temperaturen i startögonblicket $t = 0$ är $f(x)$, $0 < x < \pi$, vilken är då temperaturfördelningen vid en godtycklig senare tidpunkt?

(Svaret får innehålla serier och integraler) (2p)

c. Använd svaret i b. för att utan omfattande räkningar ange $u(x,t)$ för det fall att

$$f(x) = 2 + \cos 3x.$$ (1p)

8. a. En partikels läge $\boldsymbol{X}$ vid tiden t bestäms av systemet $\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t)$. Bestäm eventuella stationära punkter. (1p)

b. Klassificera med avseende på stabilitet och typ. (1p)

c. Bestäm systemets allmänna lösning. (2p)

d. Vart tar partikeln vägen då t växer obegränsat om partikelns i startögonblicket $t = 0$ befinner sig i punkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$? (1p)

Lycka till!