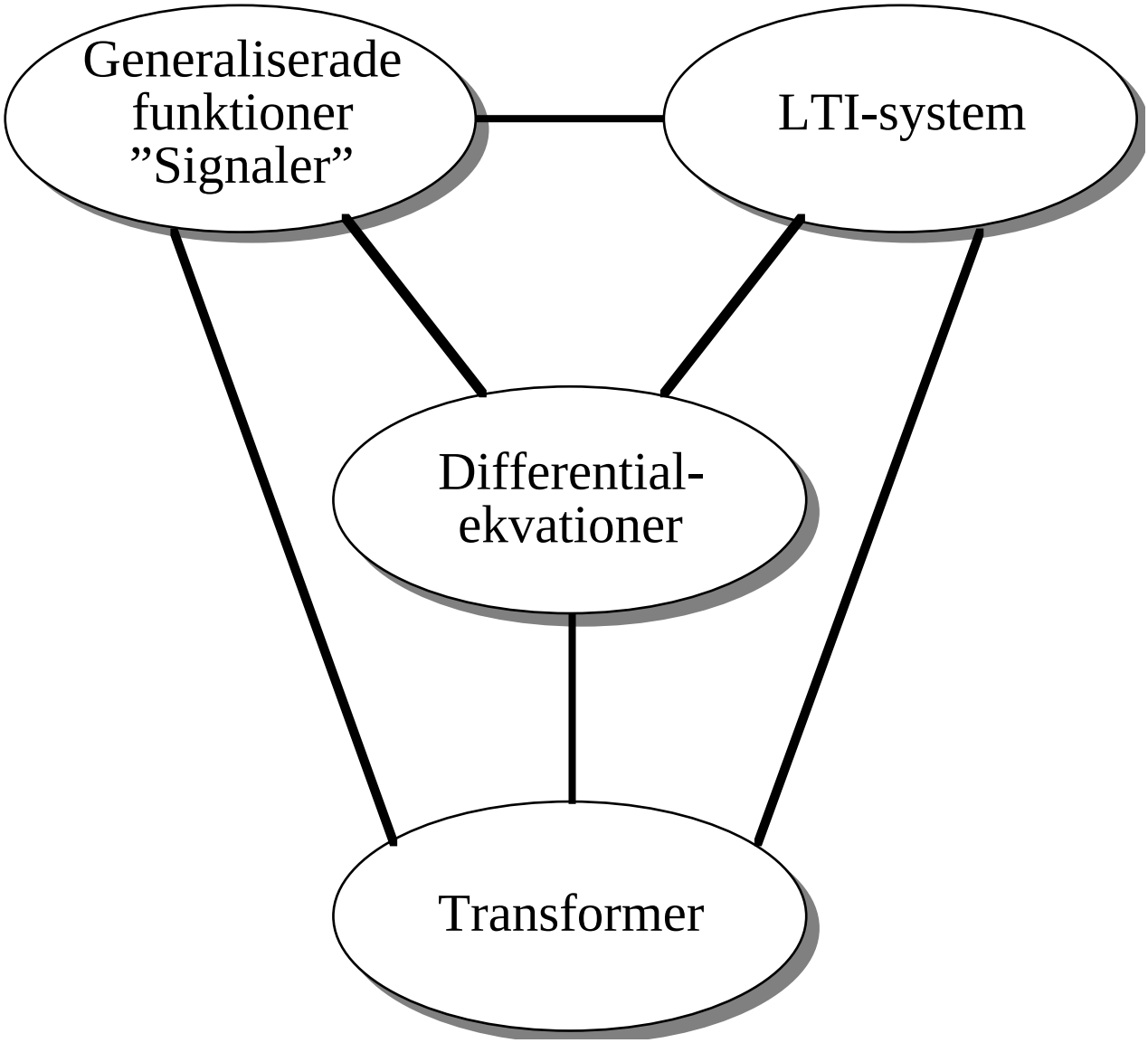
Dagens tema

- Kursöversikt

Huvudteman


Generaliserade funktioner ”Signaler”
LTI-system
Differential-ekvationer
Transformer

Kompletterande formelblad för kursen 5B1209/1215:2

1. Speciella funktioner

Språngfunktionen (Heavisides funktion) $\quad u(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases}$

Signumfunktionen $\quad \operatorname{sign} t = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ -1, & \text{om } t < 0. \end{cases}$

Rektangelfunktionen $\quad \operatorname{rect} t = \begin{cases} 1, & \text{om } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2. \end{cases}$

Sinus cardinalis (”Sincen”) $\quad \operatorname{sinc} t = \begin{cases} (\sin \pi t)/(\pi t), & \text{om } t \neq 0, \\ 1, & \text{om } t = 0. \end{cases}$

δ-*funktionen*:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } t \neq 0, \\ \text{odefinierad}, & \text{om } t = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\,\mathrm{d}t = 1 \text{ för alla konstanta } a.$$

Om $x(t)$ är kontinuerlig för $t = a$:

$$x(t)\cdot\delta(t-a) = x(a)\cdot\delta(t-a),$$

Skalning:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t), \text{ om } a \neq 0.$$

2. Generaliserad derivering

Om $x(t)$ är en sträckvis deriverbar funktion med språngdiskontinuiteter $d_1, d_2, \ldots$ i punkterna $a_1, a_2, \ldots$, dvs. $d_i = x(a_i+) - x(a_i-)$, så är

$$x'(t) = \{x'(t)\} + d_1\delta(t-a_1) + d_2\delta(t-a_2) + \ldots$$

($x'(t)$ är den generaliserade derivatan, $\{x'(t)\}$ den klassiska).

Speciellt:

$$u'(t) = \delta(t), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sign}(t) = 2\delta(t), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{rect}(t) = \delta(t+1/2) - \delta(t-1/2).$$

Derivering av δ-*pulser*:

Om $x'(t)$ kontinuerlig i $t = a$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta'(t-a)\,\mathrm{d}t = -x'(a).$

Om $x^{(n)}(t)$ kontinuerlig i $t = a$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta^{(n)}(t-a)\,\mathrm{d}t = (-1)^n x^{(n)}(a).$

3. Periodicitet

P-periodicitet, ($P > 0$):

$$x(t) \text{ är } P\text{-periodisk} \;\Leftrightarrow\; x(t+P) = x(t) \text{ för alla } t.$$

P-periodisk fortsättning:

$$x(t) \text{ är } P\text{-periodiska fortsättningen av } y(t) \;\Leftrightarrow\; x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nP).$$

4. Faltning

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) * (a\, y(t)) = a\,(x(t) * y(t)), \qquad x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t), \qquad (x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$$

$$x(t) * \delta(t-a) = x(t-a), \qquad x(t) * \delta^{(n)}(t-a) = x^{(n)}(t-a)$$

4. Komplex fourierserieutveckling av *P*-periodiska funktioner:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2\pi j n t/P}, \text{ (Syntesekvationen)}$$

$$\text{där } c_n = \frac{1}{P}\int_P x(\tau)\, e^{-2\pi j n \tau/P}\, d\tau. \text{ (Analysekvationen)}$$

Samband med reell serieutveckling för reella $x(t)$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos 2\pi n t/P + b_n \sin 2\pi n t/P),$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n) \text{ om } n \geq 1 \text{ och } = \frac{1}{2}(a_{-n} + j b_{-n}) \text{ om } n \leq -1 \text{ samt } = \frac{a_0}{2} \text{ om } n = 0,$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\, c_n, \text{ då } n \geq 0, \text{ och } b_n = -2\,\mathrm{Im}\, c_n, \text{ då } n \geq 1.$$

Funktionsnorm $\qquad \|x(t)\| = \left(\int_P |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$

Totalenergi (under 1 period): $\qquad \|x(t)\|^2 = \int_P |x(t)|^2\, dt.$

Medeleffekt $\qquad \frac{1}{P}\int_P |x(t)|^2\, dt.$

Parsevals relation $\qquad \frac{1}{P}\int_P |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$

5. Fouriertransformen

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \quad \text{(Syntesekvationen)}$$

$$\text{där} \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad \text{(Analysekvationen)}$$

(**Obs**: Variabeln ω motsvaras i ZC kap 14.4 av – α!)

Funktionsnorm $$||x(t)|| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

Totalenergi $$||x(t)||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt.$$

Parsevals relation $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega.$$

6. LTI-system

Pulssvar $\delta(t) \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow h(t)$

och utsignal generellt:

$x(t) \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$

Harmonisk insignal ger harmonisk utsignal:

$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow H(\omega)\cdot e^{j\omega t}$

där $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$ är *överföringsfunktionen*.

Överföringsfunktionen roll:

Om $x(t) \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow y(t)$,

så är $Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$.

Sammansättning (seriekoppling) av LTI-system:

$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\overset{l}{h \longrightarrow k}} \longrightarrow l(t) = k(t) * h(t)$

och för motsvarande överföringsfunktioner: $L(\omega) = K(\omega)\cdot H(\omega)$

7. Tabell över fouriertransformer

Allmänna egenskaper:

Dualitet

Funktion	Transform
Om $x(t)$	$Z(\omega)$
så $Z(t)$	$2\pi \cdot x(-\omega)$

Övrigt

Funktion	Transform
$x(t)$	$X(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}\, x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}\, X(\omega)$
$x(at),\ a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$(x * y)(t)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}(X * Y)(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega\, X(\omega)$
$t\, x(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(i\omega)^n\, X(\omega)$
$t^n\, x(t)$	$j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$
Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T	$2\pi/T$-periodisk fortsättning av $1/T \cdot X(\omega)$
L-periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $2\pi/L \cdot X(\omega)$ med sampelavstånd $2\pi/L$

Speciella transformer

Funktion	Transform
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\,\delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$
$\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)$	$e^{-j\omega t_0} + e^{j\omega t_0} = 2\cos(\omega t_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\,(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
$\delta(t - t_0) - \delta(t + t_0)$	$e^{-j\omega t_0} - e^{j\omega t_0} = -2j\sin(\omega t_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-\pi j\,(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$2\pi/T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\mathrm{rect}(t/P)$	$P\,\mathrm{sinc}(P\omega/(2\pi))$
$\mathrm{sinc}(t/(2\pi))$	$2\pi\,\mathrm{rect}(\omega)$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}(\omega/(2\pi))$

Funktioner med rationella transformer

Konstanten a förutsätts vara > 0. $\omega = 2\pi f$

Funktion	Transform
$\delta^{(n)}(t)$	$(\mathrm{j}\omega)^n$
$\mathrm{e}^{-at}\,u(t)$	$\dfrac{1}{a + \mathrm{j}\omega}$
$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}\ \mathrm{sign}\ t$	$-\dfrac{2\mathrm{j}}{a + \omega}$
$\dfrac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-at}}{(n-1)!}\,u(t)$	$\dfrac{1}{(a + \mathrm{j}\omega)^n}$
$\mathrm{j}^n\,\dfrac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{(n-1)!}\ \mathrm{sign}\ t$	$\dfrac{2}{(a + \omega)^n}$
$\mathrm{e}^{-at}u(-t)$	$\dfrac{1}{a - \mathrm{j}\omega}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}\ \mathrm{sign}\ t$	$\dfrac{2\mathrm{j}}{a - \omega}$
$\dfrac{(-t)^{n-1}\,\mathrm{e}^{at}}{(n-1)!}\,u(-t)$	$\dfrac{1}{(a - \mathrm{j}\omega)^n}$
$\dfrac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}}{\mathrm{j}^n(n-1)!}\ \mathrm{sign}\ t$	$\dfrac{2}{(a - \omega)^n}$
$\mathrm{sign}\ t$	$\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\ \mathrm{sign}\ t$	$\dfrac{2}{(\mathrm{j}\omega)^n}$
$\mathrm{e}^{-a\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\mathrm{e}^{-a\lvert t\rvert}\ \mathrm{sign}\ t$	$-\dfrac{2\mathrm{j}\omega}{a^2 + \omega^2}$
$\sin at\ \mathrm{sign}\ t$	$\dfrac{2a}{a^2 - \omega^2}$
$\cos at\ \mathrm{sign}\ t$	$\dfrac{2\mathrm{j}\omega}{a^2 - \omega^2}$

Existens- och entydighetssats (ZC, Th 1.1):

Om $f(x, y)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ är kontinuerliga så har begynnelsevärdesproblemet:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$$

en och endast en lösning $y(x)$ i varje fall i någon omgivning av $x = x_0$.

Existens- och entydighetssats (ZC, Th 4.1):

Om koefficienterna och HL i ekvationen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

är kontinuerliga i ett intervall, så kommer begynnelsevärdesproblemen (med begynnelsepunkten i intervallet) att ha en och endast en lösning i det intervallet.

Existens- och entydighetssats (ZC, Th 8.1):

Om koefficienterna och HL i ekvationen

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t)$$

är kontinuerliga i ett intervall, så kommer begynnelsevärdesproblemen (med begynnelsepunkten i intervallet) att ha en och endast en lösning i det intervallet.

Laplacetransformen

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt.$$

(Laplace-)faltning

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau\ ,\ t > 0.$$

Egenskaper hos laplacetransformen

Funktion	Transform
$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)\, u(t-a),\ a > 0$	$e^{-as}\, F(s)$
$f(at),\ a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right),\ a > 0$	$F(as)$
$(f * g)(t)$	$F(s) \cdot G(s)$
$\frac{d}{dt} f(t)$	$s\, F(s) - f(0)$
$t\, f(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
$\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s\, f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau,\ t > 0$	$\frac{F(s)}{s}$

Speciella transformer

Funktion	Transform
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\delta(t-a),\ a>0$	e^{-as}
$u(t-a),\ a>0$	$\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}$	$\frac{1}{s-\mathrm{i}a}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$