Dagens teman

- Ortogonala funktioner (ZC11.1)
- Fourierserier (ZC11.2)

Serieutveckling av ”godtyckliga” funktioner

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)}$$

Fourierserier (ZC 11.2)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Viktiga egenskaper

1. Om $f(x)$ är kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar då $-\pi \le x \le \pi$ (men f.ö. godtycklig), så är gäller för alla x i intervallet $-\pi < x < \pi$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

där $\quad a_n = \frac{1}{\pi} \oint_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad n = 0, 1, 2\ldots,$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \oint_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

2. Den trunkerade serien

$$S_N(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

är den ”bästa” approximationen till $f(x)$ bland alla linjära kombinationer av de ändligt många funktionerna

$$\cos nx \text{ och } \sin nx,\ n = 0, 1, \ldots, N$$

i följande mening:

Om

$$T_N(x) = c_0/2 + \sum_{n=1}^{N} (c_n \cos nx + d_n \sin nx),$$

där c- och d-koefficienterna inte överensstämmer med motsvarande a- och b-koefficienter, så är

$$\oint_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 \, dx < \oint_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_N(x)|^2 \, dx.$$

Skalning av x-axeln ger: (ZC Def 11.5)

Fourierserier för funktioner $f(x)$ i intervall $-p \le x \le p$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x\right),$$

där $$a_n = \frac{1}{p} \oint_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x \, \mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, 2\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{p} \oint_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x \, \mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Allmännare: För $f(x)$ def i intervall I av längd L:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{L} x\right),$$

där $$a_n = \frac{2}{L} \oint_{I} f(x) \cos \frac{2n\pi}{L} x \, \mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, 2\ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{L} \oint_{I} f(x) \sin \frac{2n\pi}{L} x \, \mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Konvergenssats (ZC Th 11.1)

Om $f(x)$ är L-periodisk, styckvis kontinuerlig och styckvis deriverbar så är (den L-periodiska) fourierserien för f =

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

(Detta medelvärde = $f(x)$ i kontinuitetspunkterna.)