Lösningar till 5B1209 / 5B1216:2, Signaler och system I
för E, ME och IT, den 7 juni 2006

(1.) $\sqrt{1+x}\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$. Ekvationen är separabel:

$\Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ eller $y = 0$

Integration ger $2\sqrt{y} = 2\sqrt{1+x} + C$

Villkoret $y(0) = 9 \Rightarrow C = 2\cdot 3 - 2\cdot 1 = 4$

Alltså $y = (\sqrt{1+x} + 2)^2$

Lösningen är giltig endast då $x > -1$

(Då $x < -1$ är funktionen inte reell och för $x = -1$ är den inte deriverbar)

<u>Svar:</u> $y = (\sqrt{1+x}+2)^2, \quad x > -1$

(2.) Man har (t.ex. enligt tabell) att för $a > 0$

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{a+j\omega}$$

$$e^{at}u(-t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{a-j\omega}$$

Vi delar därför upp och gruna bråket i partialbråk:

$$\frac{30-5j\omega}{\omega^2+j\omega+6} = \left[\begin{array}{l}\text{Faktorisering av nämnaren:}\\ \omega^2+j\omega+6=0 \Leftrightarrow \omega = -\frac{j}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4}-6}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{30-5j\omega}{(\omega+3j)(\omega-2j)} = \left[\begin{array}{l}\text{T.ex.: Hand-}\\ \text{påläggning}\end{array}\right] = \frac{\frac{30-15}{-5j}}{\omega+3j} + \frac{\frac{30+10}{5j}}{\omega-2j} =$$

$$= 3j\frac{1}{\omega+3j} - 8j\frac{1}{\omega-2j} = 3\frac{1}{3-j\omega} + 8\frac{1}{2+j\omega} \xrightarrow{FT^{-1}} 3e^{+3t}u(-t) + 8e^{-2t}u(t)$$

<u>Svar:</u> $3e^{3t}u(-t) + 8e^{-2t}u(t) = \begin{cases} 8e^{-2t}, & t > 0, \\ 3e^{3t}, & t < 0. \end{cases}$

---

(3) Ekvationen är linjär och på "normerad" form:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1+x}\,y = \frac{x}{1+x}$$

Integrerande faktor: $e^{\int\left(-\frac{1}{1+x}\right)dx} = e^{-\ln|1+x|} = \frac{1}{x+1}$

Multipliceras den normerade ekvationen med denna faktor, så får man

$$\left(\frac{1}{x+1}\cdot y\right)' = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Integration ger nu:

$$\frac{1}{1+x}\cdot y = \int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \ln|1+x| + \frac{1}{1+x} + C$$

Villkoret $y(0)=0 \Rightarrow 0 = \underbrace{\ln 1}_{=0} + 1 + C \Rightarrow C = -1$,

varav $y = (1+x)\ln|1+x| + 1 - (1+x) = (1+x)\ln(1+x) - x$

Lösningen är giltig då $x > -1$ (för $x=-1$ saknar y derivata)

Svar: $y = (1+x)\ln(1+x) - x, \quad x > -1$

(4) Man har

a) $$\operatorname{sinc} t = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \xrightarrow{FT} \operatorname{rect}\frac{\omega}{2\pi}$$

varav, efter skalning med faktor $\frac{a}{\pi}$,

$$\frac{\sin at}{at} \xrightarrow{FT} \frac{\pi}{a}\operatorname{rect}\left(\frac{\pi}{a}\cdot\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\pi}{a}\operatorname{rect}\frac{\omega}{2a}$$

vidare $\sin at \xrightarrow{FT} -\pi j\,(\delta(t-a) - \delta(t+a))$

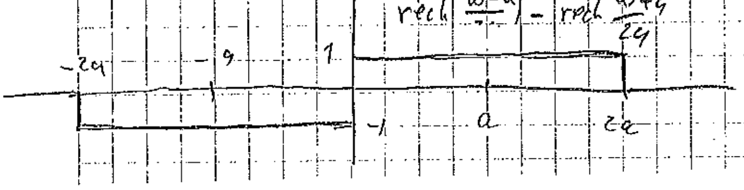
varav enl. faltningsprincipen

$$a\sin at\cdot\frac{\sin at}{at} \xrightarrow{FT} \left[a\pi j\,(\delta(t-a) - \delta(t+a)) * \frac{\pi}{a}\operatorname{rect}\frac{\omega}{2a}\right]\cdot\frac{1}{2\pi} =$$

$$= -\frac{\pi j}{2}\left(\delta(t-a) * \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right) - \delta(t+a) * \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right)\right) =$$

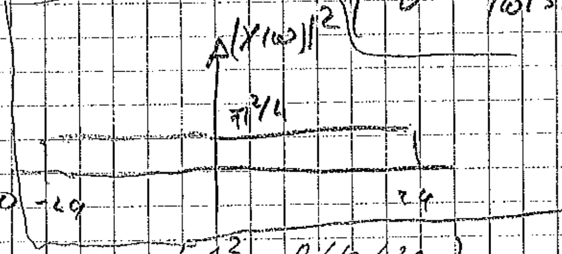
$$= -\frac{\pi j}{2}\left(\operatorname{rect}\frac{\omega-a}{2a} - \operatorname{rect}\frac{\omega+a}{2a}\right) =$$

$\operatorname{rect}\frac{\omega-a}{2a} - \operatorname{rect}\frac{\omega+a}{2a}$



$$= -\frac{\pi j}{2}\begin{cases} 1 & 0<\omega<2a \\ -1 & -2a<\omega<0 \\ 0 & |\omega|>2a \end{cases}$$

4b. Svar 4a: $X(\omega) = -\frac{\pi j}{2}\left(\mathrm{rect}\,\frac{\omega-a}{2a} - \mathrm{rect}\,\frac{\omega+a}{2a}\right) = -\frac{\pi j}{2}\begin{cases}1 & 0<\omega<2a\\ -1 & -2a<\omega<0\\ 0 & |\omega|>2a\end{cases}$



Energin $= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt$

Parsevals relation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega$$

I detta fall är $|X(\omega)|^2 = \frac{\pi^2}{4}|-j|^2 \begin{cases}1^2 & 0<\omega<2a\\ (-1)^2 & -2a<\omega<0\\ 0 & |\omega|>2a\end{cases} =$

$$= \frac{\pi^2}{4}\begin{cases}1 & |\omega|<2a\\ 0 & |\omega|>2a\end{cases}$$

varför $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{4}\int_{-2a}^{2a} d\omega = \frac{4a\pi}{8} = \frac{a\pi}{2}$

Svar: $\frac{a\pi}{2}$

(5.) Laplacetransformering ger:

$$\begin{cases} sX(s) - 2 = 4X(s) - 2Y(s) - \frac{5}{s} \\ sY(s) = 3X(s) - Y(s) - \frac{3}{s^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} s-4 & +2 \\ -3 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\frac{5}{s} \\ -\frac{3}{s^2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{A}\begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ 3 & s-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-\frac{5}{s} \\ -\frac{3}{s^2} \end{pmatrix},$$ där $A = (s-4)(s+1)+6 = s^2-3s+2 = (s-1)(s-2)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{pmatrix} (s+1)\left(2-\frac{5}{s}\right) + \frac{6}{s^2} \\ 3\left(2-\frac{5}{s}\right) - (s-4)\cdot\frac{3}{s^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{pmatrix} \frac{2s^3-3s^2-5s+6}{s^2} \\ \frac{6s^2-18s+12}{s^2} \end{pmatrix}$$

(forts) Partialbråksuppdelning ger

$$X = \frac{2s^3-3s^2-5s+6}{(s-1)(s-2)\cdot s^2} = \frac{0}{s-1} + \frac{0}{s-2} + \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}$$

[Obs f.ö. att 1 och 2 är nollställen till 3:e gradspolynomet i täljaren varför denna kan faktoriseras $2s^3-3s^2-5s+6=(s-1)(s-2)(2s+3)$, vilket direkt ger att $X = \frac{2s+3}{s^2} = \frac{2}{s}+\frac{3}{s^2}$]

$$Y = 6\,\frac{s^2-3s+2}{(s-1)(s-2)\,s^2} = 6\,\frac{(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)\,s^2} = \frac{6}{s^2}$$

Återtransformering ger svaret: $x(t) = 2+3t$, $y(t) = 6t$

Alternativ lösning

Uppgiften kan också lösas med egenvärdes- och variation-av-parametermetoderna, men då blir kalkylen mera omfattande:

I. Systemet på matrisform:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ +3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -3t \end{pmatrix}$$

II (Beräkning av fundamentalmatris)

Egenvärden: $0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \iff \lambda^2-3\lambda+2=0 \iff \lambda = 1, 2$

Egenvektorer:

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentalmatris är alltså

$$\phi = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ 3e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{och inversen: } \phi^{-1} = \frac{1}{-e^{3t}}\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -3e^t & 2e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{-t} \\ 3e^{-2t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

(5. forts alt. lösn) III (Variation-av-parameteransats) 5,

Ansatsen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix}$ i det givna systemet ger

Villkoren på $A(t)$ och $B(t)$:

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \phi^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5-3t)e^{-t} \\ (-15+6t)e^{-2t} \end{pmatrix},$$

varav $A = \int (5-3t)e^{-t}\,dt = -(5-3t)e^{-t} + \int (-3)e^{-t}\,dt =$
$= (3t-2)e^{-t} (+ C_1)$

och

$B/_3 = \int (-5+2t)\,e^{-2t} = \frac{1}{2}(5-2t)e^{-2t} + \int 2\,\frac{e^{-2t}}{2}\,dt =$
$= (2-t)e^{-2t} (+ C_2)$

En partikulär lösning är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} (3t-2)e^{-t} \\ (6-3t)e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3t-2)+(6-3t) \\ 3(3t-2)+(6-3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ 6t \end{pmatrix}$$

Observerar man att begynnelsevillkoren $x(0)=2$, $y(0)=6$ är uppfyllda, så har man svaret: $x(t) = 3t+2$, $y(t) = 6t$

(6.) a. Begynnelsevärdesproblem – Laplacetransformering är naturlig.

Vi har $y'' \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 Y(s) - s\underbrace{y'(0)}_{=0} - \underbrace{y(0)}_{=0} = s^2 Y(s)$

$\delta(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as}$ $(a>0)$

alltså

$$y''+y = 5\sum_{n=1}^{1000} \delta(t-2\pi n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (s^2+1)Y(s) = 5\sum_{n=1}^{1000} e^{-2\pi n s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \sum_{n=1}^{1000} \frac{5}{s^2+1} e^{-2\pi n s}$$

Återtransformering: $\frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin t$

$$\frac{e^{-2\pi n s}}{s^2+1} \longrightarrow \sin(t-2\pi n)\cdot u(t-2\pi n) = \sin t \cdot u(t-2\pi n)$$

Alltså Svar: $y(t) = 5\sin t \cdot \sum_{n=1}^{1000} u(t-2\pi n)$

6 forts

b. Eftersom $u(t-2\pi n) = \begin{cases} 1 & t > 2\pi n \\ 0 & t < 2\pi n \end{cases}$ så gäller för

$0 < t < 2\pi$ att $\sum_{n=1}^{1000} u(t-2\pi n) = 0$

$2\pi < t < 4\pi$ att $\sum_{n=1}^{1000} u(t-2\pi n) = u(t-2\pi) = 1$

$4\pi < t < 6\pi$ att $\sum_{n=1}^{1000} u(t-2\pi n) = u(t-2\pi) + u(t-4\pi) = 2$

Svar: 0, 5 sin t resp 10 sin t

---

c. $2\pi N < t < 2\pi(N+1) \Rightarrow 2\pi(N-n) < t - 2\pi n < 2\pi(N-n+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow u(t-2\pi n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n \le N \\ 0 & \text{om } n \ge N+1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{1000} u(t-2\pi n) = \sum_{n=1}^{N} 1 = N$

I detta t-intervall är alltså $y(t) = 5N \cdot \sin t$

Max-amplituden i detta intervall är därför 5N (i mm). Om N = 1000 är den 5 m – då lär bron redan ha skakat sönder.

Svar: $y(t) = 5N \sin t$. Bron lär inte hålla.

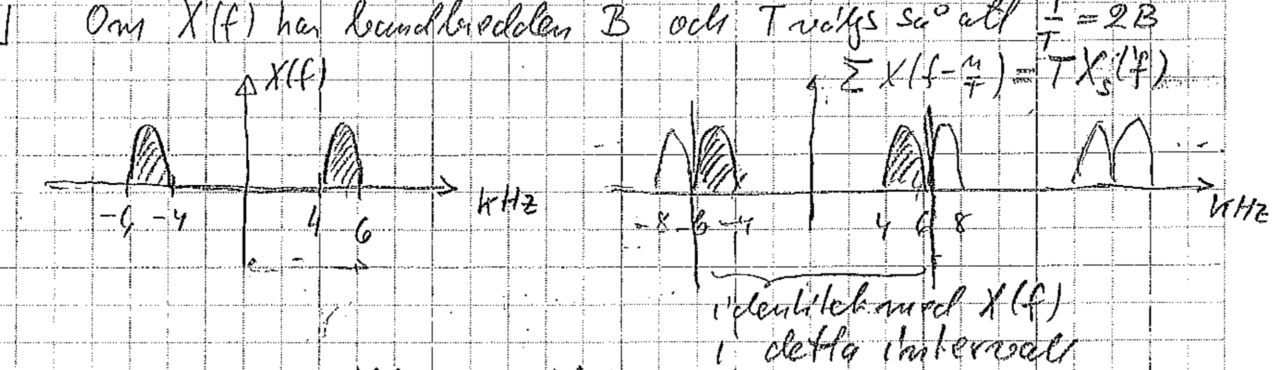
(6+) Vi har följande:

Om $x(t) \longrightarrow X(f)$ och $x(t)$ samplas med sampelavståndet T så gäller för sampelfunktionen $x_s(t)$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT) \xrightarrow{FT} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right),$$

dvs. sampelfunktionens transform $X_s = \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{1}{T}\text{-periodiska fortsättningen av } X(f)\right)$

a.) Om $X(f)$ har bandbredden B och T väljs så att $\frac{1}{T} = 2B$



Så kommer $X(f)$ och $X_s(f)$ att vara identiska i intervallet $-B < f < B$, dvs.

$$X(f) = X_s(f) \cdot T\,\mathrm{rect}\frac{f}{2B}$$

(6+ forts)

Återtransformering ger

$$x(t) = X_s(t) * \underbrace{T}_{=1} 2B\,\mathrm{sinc}\,2Bt =$$

$$= \sum x(nT)\,\delta(t-nT) * \mathrm{sinc}\,2Bt =$$

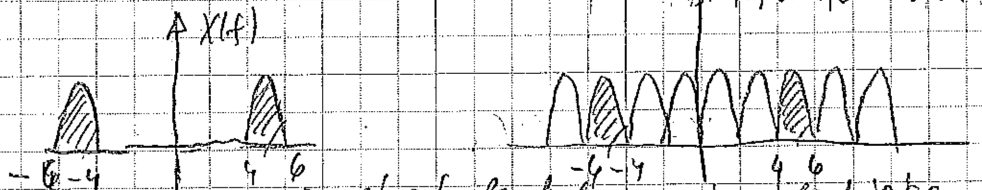
$$= \sum x(nT)\,\mathrm{sinc}\,2B(t-nT) = [B=6]$$

$$= \sum x(nT)\,\mathrm{sinc}\,12(t-nT)$$

Svar: a) $g(t) = \mathrm{sinc}\,12t$ (t mäts i millisek.)

b) Om spektret $\neq 0$ bara i frekvensintervallet $|4-6$ kHz och signalen samplas med sampelfrekvensen $T = 4$ kHz den samplade signalens FT att överensstämma med motsvarande X_s i intervallen $4 < |f| < 6$!

p.g.a. per.-fak. är $X(f) = 4X_s(f)$



De streckade loberna är identiska

Alltså är $X(f) = X_s(f) \cdot T \cdot H(f)$, $T = \frac{1}{4}$

där $H(f) = \begin{Bmatrix} 1 & 4 < |f| < 6 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{Bmatrix} = \mathrm{rect}\,\frac{f}{12} - \mathrm{rect}\,\frac{f}{8}$

Återtransformering ger

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT) * T\,h(t) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\underbrace{T\,h(t-nT)}_{g(t-nT)}$$ ← g är den sökta funktionen.

Vi har att $h(t) = 12\,\mathrm{sinc}\,12t - 8\,\mathrm{sinc}\,8t$

och $g(t) = \frac{1}{4} h(t) = 3\,\mathrm{sinc}\,12t - 2\,\mathrm{sinc}\,8t$

Svar b: $g(t) = 3\,\mathrm{sinc}\,12t - 2\,\mathrm{sinc}\,8t$, (t i millisek).