Tentamen 5B1209/1215:2, Signaler och system I, för E, IT och ME,
051215, kl 8^{00} – 13^{00}

Hjälpmedel: Zill-Cullen; Differential Equations with Boundary-Value Problems, Utdelat arbetsmaterial, β Mathematics Handbook, kursens formelsamlingar, räknedosa.

För dem som läst kursen senast VT05 dessutom Oppenheim-Willsky: Signals and systems, Hjalmarsson: Kompletterande kursmaterial för Signaler och system I.

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 24p, för betyget 4 minst 32p och för betyget 5 minst 40p. 20 – 23p berättigar till en kompletterande tentamen.

Den som läst kursen senast VT 2005 ersätter uppgift 2 med uppgift 2^+.

1. Bestäm den lösning till systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x'(t) = & 13\,y(t), \\ y'(t) = -2x(t) + & 2\,y(t), \end{cases}$$

för vilken $x(0) = 0$ och $y(0) = 5$. (7p)

2. *(Endast för dem som läst kursen HT05)*

Funktionen $y(t)$ uppfyller sambanden

$$y''(t) + 20\int_0^t y(\tau)\, e^{2(t-\tau)}\, d\tau + 10y(t) = 0,\; y(0) = 0 \text{ och } y'(0) = 1.$$

a. Beräkna $y(t)$:s laplacetransform. (3p)
b. Beräkna $y(t)$. (3p)

2^+ *(Endast för dem som läst kursen senast VT05)*

a. Verifiera att den tidsdiskreta signalen

$$x[n] = \cos\,(n\pi/3 + \pi/4),\quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

är periodisk och ange dess kortaste period N. (1p)

b. Beräkna den diskreta fouriertransformen (DFT:n) till följden

$$x[n],\ n = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (5p)$$

3. a. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$(x-1)^2 y'(x) + x(1-x)\,y(x) = e^x. \qquad (7p)$$

b. Om y dessutom uppfyller villkoret $y(0) = 0$, vilket är då dess största möjliga definitions*intervall*? (1p)

4. Beräkna för alla positiva konstanter a faltningen $e^{-a|t|} * e^{-2|t|}$. Beakta särskilt fallet $a = 2$.

Med faltning avses här fourierfaltningen. $\displaystyle x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\, d\tau.$ (9p)

5. a. Beräkna koefficienterna i den 4-periodiska komplexa fourierserie vars summa $x(t)$ i intervallet $|t| < 1$ är lika med $1 - t^2$ och i intervallet $1 < t < 3$ är lika med $(t-1)(t-3)$. (7p)

b. Signalen $x(t)$ – t mätt i millisekunder – bearbetas i ett så kallat lågpassfilter vars funktion är att sila bort alla frekvenser högre än 500 Hz medan de lägre frekvenserna inte berörs alls. Bestäm den filtrerade signalen $\hat{x}(t)$. (2p)

c. Om $\hat{x}(t)$ tas som approximation till den harmoniska 4-periodiska signalen $\cos \pi t/2$, vilket är då approximationens relativa medelfel $\|\hat{x}(t) - \cos \pi t/2\|^2 / \|\cos \pi t/2\|^2$,

där $$\|y(t)\|^2 = \int_{-2}^{2} |y(t)|^2\, dt? \qquad (1p)$$

Var god vänd!

6. När två sinustoner med nästan samma frekvens överlagras uppstår en "svävande" ton – den ursprungliga tonens ljudstyrka pulserar. I figur 1 visas ljudsignalen

$$x_2(t) = \sin(2\pi \cdot 440\, t) + \sin(2\pi \cdot 441\, t),$$

dvs två överlagrade sinussignaler med samma amplitud och fas men med frekvenserna 440 resp. 441 Hz.

Om man på liknande sätt överlagrar flera sinussignaler med samma fas och samma succesiva frekvensskillnader, så hör man likaledes en pulserande ton. I figur 2 visas signalen där man summerat de 13 heltalsfrekvenserna 440 – 452 Hz,

$$x_{13}(t) = \sum_{n=0}^{12} \sin(2\pi \cdot (440 + n)t).$$

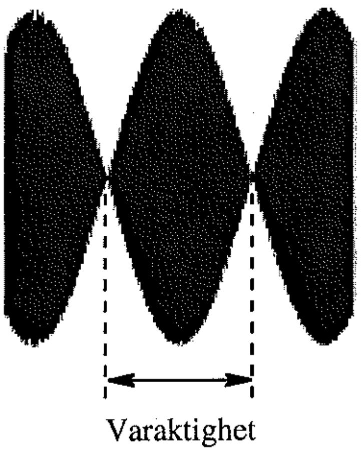

Fig. 1

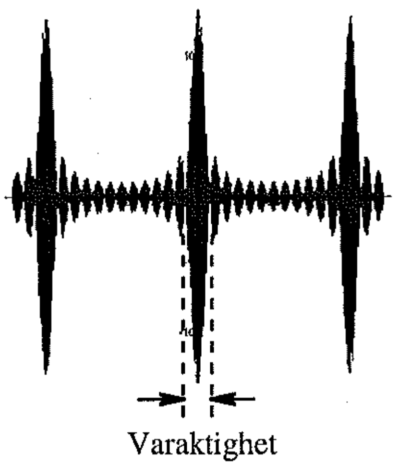

Fig. 2

De ljudstarkaste delarna av tonen (de högsta loberna i grafen – *huvudloberna*) är här mycket kortare. Låt oss definiera *varaktigheten* hos en sådan lob som tidsavståndet mellan de två närmaste nollställena före och efter ett pulsmaximum.

Din uppgift är att reda ut sambandet mellan antalet överlagrade sinustoner och varaktigheten hos summatonens pulser.

a. Bestäm varaktigheten för de höga pulserna (huvudloberna) i signalen $x_2(t)$. (3p)

b. Verifiera att om P st. signalerna $\sin(2\pi \cdot (440 + n)t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, P-1$ överlagras,

$$x_P(t) = \sum_{n=0}^{P-1} \sin(2\pi \cdot (440 + n)t),$$

så får man en periodiskt amplitudmodulerad variant av en sinuston, dvs att

$$x_P(t) = H(t)\sin(2\pi \cdot f_0 t),$$

där $H(t)$ är en periodisk funktion. Bestäm också $H(t)$ och f_0. (6p)

c. Verifiera att huvudloben i $x_P(t)$ har varaktigheten $2/P$. (1p)

Till din hjälp har du summationsformeln

$$\sum_{n=0}^{P-1} e^{2\pi j n t} = e^{\pi j P t}\,\frac{\sin \pi P t}{\sin \pi t},$$ (och $= P$ då t är ett helal).

(*Anmärkning*: Resultatet ovan kan användas för att med hjälp av sinustongeneratorer skapa toner som kommer som exremt korta ljudpulser. Årets nobelpristagare i fysik utnyttjade den tekniken, men hos dem handlade det istället om ljus och laserstrålar ...)

Lycka till!