Dagens teman

Linjära ODE-system av ordning 1:

- *Egenvärdesmetoden*.
  Lösning av homogena system

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ \quad \ldots \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \qquad \text{(ZC 8.2.2)}$$

- *Variation-av-parametermetoden* för lösning av allmänna linjära 1:a ordningens ODE-system.

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ \quad \ldots \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{cases} \qquad \text{(ZC 8.3)}$$

Högre ordningens system som specialfall av 1:a ordningens. (Tillägg)

Lösningmängdernas struktur: (ZC 8.1)

- Allmän lösning till (H): (Th 8.5)

$$\boldsymbol{X}_h = c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{X}_n,$$

där $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ är n st *linjärt oberoende* lösningar till (H) och
där $c_1, c_2, \ldots, c_n$ är godtyckliga konstanter.

- Allmän lösning till (A): (Th 8.6)

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_p + \boldsymbol{X}_h$$

där $\boldsymbol{X}_p$ är någon (vilken som helst) lösning till (A) och $\boldsymbol{X}_h$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Kriterium för linjärt oberoende. ZC Th 8.3

Om n st (vektor-)funktioner

$$\boldsymbol{X}_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_2(t) = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{X}_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix},$$

alla är lösningar till det homogena systemet

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t),$$

där a:na är kontinuerliga funktioner av t i ett intervall I,

så är de linjärt oberoende i detta intervall om och endast om determinanten W för matrisen

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

är $\neq 0$ för något t i intervallet.

En sådan uppsättning av systemets lösningar kallas en *fundamentalmängd av lösningar* och matrisen Φ är en *fundamentalmatris*.

En lösningsmetod (*egenvärdesmetoden*) för *homogena* system med *konstanta* koefficienter

(ZC 8.2)

Metoden bygger på ansatsen:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}\, e^{\lambda t},$$

där $\boldsymbol{k}$ är en konstant vektor $\neq \mathbf{0}$ och λ en konstant skalär (reell eller komplex).

Ansatsen leder till följande villkor på λ:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

dvs. till polynomekvationen

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(*Egenvärdesekvationen*, *karakteristiska ekvationen*, λ-rötterna kallas *egenvärden*.)

Och följande villkor på $\boldsymbol{k}$:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{k} = \mathbf{0}, \text{ dvs.}$$

det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

($\boldsymbol{k}$-lösningarna $\neq \mathbf{0}$ kallas *egenvektorer*).

Med hjälp av egenvärdesbestämningar kan alltid n st linjärt oberoende lösningar till (H) bestämmas. Typiska exempel:

(i) ZC 8.2, ex.2 (reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

(ii) ZC 8.2, ex. 6 (icke-reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

och de mera ”ovanliga” fallen:

(iii) ZC 8.2, ex. 3 – 5 (multipla rötter till egenvärdesekvationen).

Multipelrotsfallen:

För dubbelrötter (λ_0) till egenvärdesekvationen kan man visa att det alltid finns två linjärt oberoende lösningar av formen

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{k}_1 t + \boldsymbol{k}_0)\, e^{\lambda_0 t},$$

där $\boldsymbol{k}_1$ och $\boldsymbol{k}_0$ är konstanta vektorer. Dessa kan bestämmas ur sambanden:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^2 \boldsymbol{k}_0 = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{k}_1 = (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) \boldsymbol{k}_0. \end{cases} \qquad \text{(ZC, sid 344)}$$

Allmänt, för rötter av multiplicitet m så fungerar en liknande ansats med ett polynom av grad $m - 1$ som koefficient för $e^{\lambda_0 t}$,

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{k}_{m-1} t^{m-1} + \ldots + \boldsymbol{k}_1 t + \boldsymbol{k}_0)\, e^{\lambda_0 t}.$$

[Villkoren som bestämmer $\boldsymbol{k}$-vektorerna lyder då

$$\begin{cases} (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^m \boldsymbol{k}_0 = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{k}_\nu = \dfrac{1}{\nu} (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \mathbf{I})\, \boldsymbol{k}_{\nu - 1}, \nu = 1, 2, \ldots, m - 1. \end{cases}$$

(ZC, sid 345, behandlar trippelrotsfallet.)]

Variation-av-parametermetoden:
(ZC 8.3)

En metod för lösning av allmänna linjära ODE-system:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{f} \text{ ”godtyckligt”.} \qquad \text{(A)}$$

Metoden förutsätter att man känner (eller kan ta reda på) den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t),$$

men förutsätter inget annat om koefficienterna i $\boldsymbol{A}$-matrisen än att de är kontinuerliga funktioner av t.

Förberedelser:

Lös först motsvarande homogena system:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) \qquad \text{(H)}$$

Lösningsmängden, som för de fall då $\boldsymbol{A}$ är konstant kan bestämmas med egenvärdesmetoden, kan alltid skrivas:

$$\boldsymbol{X}_h = c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{X}_n,$$

där $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ är n st *linjärt oberoende* lösningar till (H), c:na konstanter. (ZC 8.1, th 8.5).

På matrisform blir detta:

$$\boldsymbol{X}_h = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} = \Phi\boldsymbol{c}$$

Φ kallas *fundamentalmatris* (ZC 8.3) och den karakteriseras av att

- kolonnvektorerna är n olika lösningar till (H), och
- kolonnvektorerna är linjärt oberoende, dvs $\det(\Phi) \neq 0 \Leftrightarrow \Phi$ är inverterbar.

Man har också att

$$\Phi'(t) = \boldsymbol{A}\Phi(t).$$

Metoden går ut på att man i ekvationen

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t)$$

ansätter

$$\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\,\boldsymbol{U}(t).$$

Man får (ZC sid 394 - 395),

$$\boldsymbol{U}'(t) = \Phi^{-1}(t)\,\boldsymbol{f}(t),$$

och som allmän lösning:

$$\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\left(\boldsymbol{C} + \int_a^t \Phi^{-1}(s)\,\boldsymbol{f}(s)\,ds\right),$$

där $\boldsymbol{C}$ är en konstant vektor.

Med känt begynnelsevillkor $\boldsymbol{X}(a) = \boldsymbol{X}_0$ ger detta:

$$\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(a)\boldsymbol{X}_0 + \Phi(t)\int_a^t \Phi^{-1}(s)\,\boldsymbol{f}(s)\,ds.$$

Högre ordnings system

Varje system av differentialekvationer av högre ordning är ekvivalent med ett 1:a ordningens system.

Konstgrepp:

Om systemet innehåller funktionen $\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}$ så införs nya obekanta funktioner

$$x_1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

$$x_2 = x_1', \qquad \left(= \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \right),$$

$$x_3 = x_2', \qquad \left(= \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} \right),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1} = x_{n-2}', \qquad \left(= \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} \right),$$

Dessa ekvationer tillförs systemet. Sedan ersätts alla förekomster av derivatorna upp till ordning $n - 1$ med dessa nya funktioner och n:te derivatan med 1:a-derivatan x_{n-1}'.