Modelltenta , 5B1209/1215:2, Signaler och system I, för IT och ME

Hjälpmedel: Zill-Cullen; Differential Equations with Boundary-Value Problems, Utdelat arbetsmaterial, β Mathematics Handbook, räknedosa

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 24p, för betyget 4 minst 32p och för betyget 5 minst 40p. 20 – 23p berättigar till en kompletterande tentamen.

1. Använd variation-av-parametermetoden för att bestämma den allmänna lösningen till

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}, \; t > 0. \qquad (7p)$$

2. Bestäm den generaliserade funktion $f(t)$ vars Laplacetransform är

$$\frac{s^2 + 3s - 9}{s^2 + s - 2}\, e^{-3s}. \qquad (7p)$$

3. Funktionen x definieras av

$$x(t) = \begin{cases} 1/2, & \text{då } |t| \le 1/2, \\ 1 - |t|, & \text{då } 1/2 < |t| < 1, \\ 0, & \text{då } |t| > 1. \end{cases}$$

Beräkna de generaliserade 1:a- och 2:a-derivatorna till $x(t)$. Ange sedan fouriertransformen av $x(t)$. (8p)

4. a. Lös differentialekvationen

$$x(x+1)y' - y = x^2 \cos x. \qquad (7p)$$

b. Bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(\pi) = 0$ och ange det största intervall inom vilken den lösningen gäller. (2p)

5. I ett tabellverk hittar man att funktionen

$$|t|\, e^{-a|t|}, \; a > 0$$

har fouriertransformen

$$\frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}.$$

Beräkna med ledning härav

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a^2 - t^2)^2}{(a^2 + t^2)^4}\, dt. \qquad (9p)$$

6. Signalen $x(t)$ har fouriertransformen

$$X(f) = \begin{cases} 0, & \text{då } |f| > 2, \\ 1, & \text{då } |f| < 1 \quad \text{och} \\ 2 - |f|, & \text{då } 1 \le |f| \le 2. \end{cases}$$

Signalen samplas vid tidpunkterna $t = \frac{n}{3}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

a. Vilken är fouriertransformen för den samplade signalen? (6p)

b. Vilken är sampelvärdena $x(n/3)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$? (4p)

Anmärkning: Uppgiften kan lösas utan omfattande kalkyler.

Svar:

1. $y(t) = (t \ln t + At + B)\, e^{t}$.

2. $f(t) = \delta(t-3) + \left(\frac{11}{3} e^{-2(t-3)} - \frac{5}{3} e^{(t-3)}\right) u(t-3)$, där u är stegfunktionen.

3. $x'(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } -1 < t < -1/2, \\ -1 & \text{då } 1/2 < t < 1, \\ 0, & \text{då } |t| < 1/2 \text{ eller } |t| < 1. \end{cases}$ $\quad x''(t) = \delta(t+1) - \delta(t+1/2) - \delta(t-1/2) + \delta(t-1)$

$X(\omega) = 2\,\frac{\cos(\omega/2) - \cos\omega}{\omega^2}$ $\left(, X(0) = \frac{3}{4}\right)$

4a. $y = \frac{x(\sin x + C)}{x+1}$

4b. $y = \frac{x \sin x}{x+1}$, $x > -1$.

5. $\frac{\pi}{4a^3}$.

6a. $X_{\text{samplad}}(f) = 3 \times$ (3-periodiska fortsättningen av $X(f)$) = 3 (rita figur!).

Detta medför att $x_{\text{samplad}}(t)$ (= $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n/3)\, \delta(t - n/3)$) = $3\delta(t)$, identifiering ger

6b. $x(0) = 3$, $x(n/3) = 0$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$