Dagens teman

Linjära ordinära differentialekvationer
(linjära ODE)

- Terminologi: Lösning, begynnelsevärdes-problem, randvärdesproblem (ZC4.1)
- Reduktion av ordningen (ZC4.2)

Linjära ODE av godtycklig ordning:
ZC 4.1

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots a_1(x)y' + a_0(x)y =$$

$$= \begin{cases} g(x). & \text{Allmänna fallet,} \quad (A) \\ 0. & \text{Homogena fallet,} \quad (H) \end{cases}$$

För *begynnelsevärdesproblem* (inital value problems) söker man lösningar i ett intervall som innehåller ”begynnelsepunkten” x_0, samt där de n talen

$$y^{(n-1)}(x_0), \ldots, y'(x_0), y(x_0)$$

antar föreskrivna värden. (ZC 4.1.1)

För *randvärdesproblem* (boundary value problems) söker man istället lösningar i något intervall $a \leq x \leq b$, lösningar som dessutom uppfyller n st föreskrivna villkor på den och/eller dess derivator i *båda* ändpunkterna. (ZC 4.1.1)

Existens- och entydighetssats (ZC, Th 4.1):

Om a-koefficienterna och HL i ekvationen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

är kontinuerliga i ett intervall, så kommer begynnelsevärdesproblemen (med begynnelsepunkten i intervallet) att ha en och endast en lösning i det intervallet.

Linjära ODE av godtycklig ordning:
ZC 4.1

Superpositionsegenskaper:

- y_1 och y_2 lösningar till (H)
  $y = c_1y_1 + c_2y_2$ lösningar till (H) för godtyckliga konstanter c_1 och c_2.

- y_1 och y_2 lösningar till (A)
  $y = y_1 - y_2$ lösning till (H).

- Om (H) har *reella* koefficienter:
  $y = u + \mathrm{i}v$ (u och v reella) en komplex lösning till (H) $\Leftrightarrow$
  u och v lösningar till (H).

Lösningmängdernas struktur:

- Allmän lösning till (H):

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

där $y_1, y_2, \dots, y_n$ är n st *linjärt oberoende* lösningar till (H) och
där $c_1, c_2, \dots, c_n$ är godtyckliga konstanter.

- Allmän lösning till (A):

$$y = y_p + y_h$$

där y_p är någon (vilken som helst) lösning till (A) och y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Definition av ”linjärt oberoende funktioner”:

n st funktioner $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ är *linjärt oberoende* på ett intervall I om likheten

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) = 0, \qquad (*)$$

för alla x i intervallet I, c:na konstanter,

är uppfylld endast om c:na alla är = 0.

Motsatsen ”linjärt beroende funktioner” innebär att likheten $(*)$ uppfylls med några av c:na $\neq 0$.

Detta är ekvivalent med att minst en av y-funktionerna är en linjär kombination till de andra, ex.vis

$$y_1(x) = d_2y_2(x) + \ldots + d_ny_n(x)$$

Två funktioner är linjärt beroende om och endast om den ena av dem är en konstant multipel av den andra.

Reduktion av ordning
ZC4.2

Om $y_1(x)$ är en känd icke-trivial lösning till

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

och $y_1(x)$ är en lösning $\neq 0$, så ger substitutionen

$$y(x) = y_1(x) \cdot u(x), \text{ (}u\text{ ny obekant funktion)}$$

en linjär och homogen differentialekvation av ordning $n - 1$, med $u'(x)$ som obekant.