

Existens- och entydighetssats (ZC, Th 8.1):

Om koefficienterna och HL i ekvationen

$$X'(t) = AX(t) + f(t)$$

är kontinuerliga i ett intervall, så kommer begynnelsevärdesproblemen (med begynnelsepunkten i intervallet) att ha en och endast en lösning i det intervallet.

Superpositionsegenskaper: (ZC 8.1)

- X_1 och X_2 lösningar till (H)
 $X = c_1X_1 + c_2X_2$ lösningar till (H) för godtyckliga konstanter c_1 och c_2 . (Th 8.2)
- X_1 och X_2 lösningar till (A)
 $X = X_1 - X_2$ lösning till (H).
- Om (H) har *reella* koefficienter:
 $X = U + jV$ (U och V reella) en komplex lösning till (H)
 U och V lösningar till (H).

Lösningmängdernas struktur: (ZC 8.1)

- Allmän lösning till (H): (Th 8.5)

$$\mathbf{X}_h = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \dots + c_n\mathbf{X}_n,$$

där $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ är n st *linjärt oberoende* lösningar till (H) och där c_1, c_2, \dots, c_n är godtyckliga konstanter.

- Allmän lösning till (A): (Th 8.6)

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_p + \mathbf{X}_h$$

där \mathbf{X}_p är någon (vilken som helst) lösning till (A) och \mathbf{X}_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Kriterium för linjärt oberoende. ZC Th 8.3

Om n st (vektor-)funktioner

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{X}_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix},$$

alla är lösningar till det homogena systemet

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t),$$

där a :na är kontinuerliga funktioner av t i ett intervall I ,

så är de linjärt oberoende i detta intervall om och endast om determinanten W för matrisen

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

är $\neq 0$ för något t i intervallet.

En sådan uppsättning av systemets lösningar kallas en *fundamentalmängd av lösningar* och matrisen är en *fundamentalmatrix*.

**En lösningsmetod (*egenvärdesmetoden*) för
homogena system med konstanta koefficienter
(ZC 8.2)**

Metoden bygger på ansatsen:

$$X = k e^{\lambda t},$$

där k är en konstant vektor $\neq \mathbf{0}$ och λ en konstant skalär (reell eller komplex).

Ansatsen leder till följande villkor på λ :

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

dvs. till polynomekvationen

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(*Egenvärdesekvationen, karakteristiska ekvationen, λ -rötterna kallas egenvärden.*)

Och följande villkor på \mathbf{k} :

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{k} = \mathbf{0}, \text{ dvs.}$$

det linjära ekvationssystemet

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} - & a_{12} & \dots & a_{1n} & k_1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} - & \dots & a_{2n} & k_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - & k_n & 0 \end{array} = \dots$$

(\mathbf{k} -lösningarna $\mathbf{0}$ kallas *eigenvektorer*).

Med hjälp av egenvärdesbestämningar kan alltid n st linjärt oberoende lösningar till (H) bestämmas.
Typiska exempel:

- (i) ZC 8.2, ex.2 (reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),
- (ii) ZC 8.2, ex. 6 (icke-reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

och de mera "ovanliga" fallen:

- (iii) ZC 8.2, ex. 3 – 5 (multipla rötter till egenvärdesekvationen).

Multipelrotsfallen:

För dubbelrötter (λ_0) till egenvärdesekvationen kan man visa att det alltid finns två linjärt oberoende lösningar av formen

$$\mathbf{X} = (\mathbf{k}_1 t + \mathbf{k}_0) e^{\lambda_0 t},$$

där \mathbf{k}_1 och \mathbf{k}_0 är konstanta vektorer. Dessa kan bestämmas ur sambanden:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^2 \mathbf{k}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{k}_1 &= (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{k}_0. \end{aligned} \quad (\text{ZC, sid 344})$$

Allmänt, för rötter av multiplicitet m så fungerar en liknande ansats med ett polynom av grad $m - 1$ som koefficient för $e^{\lambda_0 t}$,

$$\mathbf{X} = (\mathbf{k}_{m-1} t^{m-1} + \dots + \mathbf{k}_1 t + \mathbf{k}_0) e^{\lambda_0 t}.$$

[Villkoren som bestämmer \mathbf{k} -vektorerna lyder då

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^m \mathbf{k}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{k}_i &= \frac{1}{i!} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^i \mathbf{k}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

(ZC, sid 345, behandlar trippelrotsfallet.)]