Dagens teman

- Ortogonala funktioner (ZC11.1)
- Fourierserier (ZC11.2)

Serieutveckling av ”godtyckliga” funktioner

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)}$$

Fourierserier (ZC 11.2)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Viktiga egenskaper

1. Om $f(x)$ är kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar då $-\pi \leq x \leq \pi$ (men f.ö. godtycklig), så är gäller för alla x i intervallet $-\pi < x < \pi$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

där $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad n = 0, 1, 2\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

2. Den trunkerade serien

$$S_N(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

är den ”bästa” approximationen till $f(x)$ bland alla linjära kombinationer av de ändligt många funktionerna

$$\cos nx \ \text{ och } \sin nx,\ n = 0, 1, \ldots, N$$

i följande mening:

Om

$$T_N(x) = c_0/2 + \sum_{n=1}^{N} (c_n \cos nx + d_n \sin nx),$$

där c- och d-koefficienterna inte överensstämmer med motsvarande a- och b-koefficienter, så är

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_N(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Skalärprodukt och norm

Definitioner (ZC Def 11.1 – 3)

Normen av en funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$:

$$\|f(x)\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Storheten $\|f(x) - g(x)\|$ är ett slags mått på avståndet mellan f och g.

Skalär produkt av två (reellvärda) funktioner $f(x)$ och $g(x)$, $a \leq x \leq b$:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx.$$

Funktionerna är *ortogonala* om $(f, g) = 0$.

Enligt ovan är $(f, f) = \|f(x)\|^2$.

Detta är i analogi med koordinatformlerna för skalärprodukt och belopp hos vektorer i $\mathbf{R}^N$:

Om

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N),$$

så är

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{n=1}^{N} u_n v_n$$

och

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2 = \sum_{n=1}^{N} |u_n|^2$$

Speciellt för fourierserier:

1. Funktionerna

$$1, \cos nx \text{ och } \sin nx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

är parvis ortogonala på intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$.

2. $\|\cos nx\|^2 = \|\sin nx\|^2 = \pi$, $\|1\|^2 = 2\pi$.

Fourierserieutvecklingen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

kan ses som en koordinatframställning av f i basen (basfunktionerna)

$$1, \cos nx \text{ och } \sin nx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

På grund av deras ortogonalitet får man:

$$(f(x), \cos mx) = a_m \|\cos mx\|^2 = \pi a_m,$$

$$(f(x), \sin mx) = b_m \|\sin mx\|^2 = \pi b_m,$$

$$(f(x), 1) = \frac{a_0}{2} \|1\|^2 = \pi a_0,$$

dvs. utskrivet med integraler:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, \mathrm{d}x, \qquad m = 0, 1, 2\ldots,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, \mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Allmännare om konsten att utveckla funktioner i serier:

Om funktionerna $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $a \leq x \leq b$, är ortogonala
d.v.s.

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x)\, dx = 0, \text{ om } n \neq m,$$

och

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \qquad (*)$$

så finns anledning att förmoda att

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{||\varphi_n||^2} = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \varphi_n(x)\, dx}{\int_a^b |\varphi_n(x)|^2\, dx}. \qquad (**)$$

För vissa sådana φ-funktioner, s.k. *fullständiga funktionsföljder*, kan ”varje” funktion i intervallet $a \leq x \leq b$ skrivas om enligt (*), där c_n beräknas enligt (**)