Dagens tema

- Fourierserier (forts) (ZC11.2, 11.3)

  Funktioner definerade i godtyckliga begränsade intervall

  Sinus- resp. cosinusutvecklingar

Skalning av x-axeln ger: (ZC Def 11.5)

Fourierserier för funktioner $f(x)$ i intervall $-p \le x \le p$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x\right),$$

där $$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, 2\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Allmännare: För $f(x)$ def i intervall I av längd L:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{2n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{L}x\right),$$

där $$a_n = \frac{2}{L}\int_{I} f(x)\cos\frac{2n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, 2\ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{I} f(x)\sin\frac{2n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Konvergenssats (ZC Th 11.1)

Om $f(x)$ är L-periodisk, styckvis kontinuerlig och styckvis deriverbar så är (den L-periodiska) fourierserien för f =

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

(Detta medelvärde = $f(x)$ i kontinuitetspunkterna.)

Utveckling av udda resp jämna funktioner

Fourierserier för *jämna* funktioner $f(x)$ i $-p \le x \le p$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x,$$

där $$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Fourierserier för *udda* funktioner $f(x)$ i $-p \le x \le p$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{p} x,$$

där $$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$