

Dagens tema

- Fouriermetoder, inledning (Arbetsmaterial 2)

Komplexa fourierserier

Fouriertransformen (orientering)

Energi hos signal, Parsevals relation

Komplex fourierserietutveckling, L -periodisk:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t/L}, \quad (\text{Syntesekvation})$$

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(t) e^{-2\pi i n t/L} dt \quad (\text{Analysekvation})$$

Om $x(t)$ reell och

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{L} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{L} t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t/L} \end{aligned}$$

så gäller

$$a_n = 2 \operatorname{Re} c_n, \quad \text{då } n > 0,$$

$$b_n = -2 \operatorname{Im} c_n, \quad \text{då } n > 0.$$

$$c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}, \quad \text{då } n > 0,$$

$$c_n = \frac{a_{-n} + i b_{-n}}{2}, \quad \text{då } n < 0,$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \text{då } n = 0.$$

Fouriertransformen

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (\text{Syntesekvation})$$

där

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{Analysekvation})$$

Skalärprodukt för komplexa funktioner

Skalärprodukt:

$x(t)$ och $y(t)$ definierade i intervall $a < t < b$
($a = -\infty$ och/eller $b = \infty$ ej uteslutna).

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt.$$

Ortogonalitet:

$$\int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt = 0.$$

Viktigt exempel: Om m och n olika heltal så är

$e^{2\pi i n t/L}$ och $e^{2\pi i m t/L}$ på intervall av längd L .

Norm:

$$\|x(t)\|^2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt = \sqrt{(x(t), x(t))}.$$

Exempelvis: På intervall av längd L :

$$\|e^{2\pi i n t/L}\|^2 = L.$$

Storheten $\|x(t)\|^2$ är ett mått på signalens energiinnehåll.

Parsevals relation

För fourierserier:

Om $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n t / L}$, så är

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

För fourierintegraler:

Om $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i \omega t} d\omega$, så är

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega.$$

Energitolkning av dessa relationer

”Energien hos en signal
= summan av delsvängningarnas energi.”