Matematiska Institutionen
KTH

Extra övningsuppgifter för kursen 5B1304
kap 1 – 5 i Kreyszig

1. Ekvationen $x^2y'' - x(2+x)y' + (2+x)y = 0$ satisfieras av $y = x$. Bestäm ekvationens allmänna lösning.

2. Differentialekvationen
$$(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$
har lösningarna $y = x$ och $y = x^2 + 1$, (detta behöver ej verifieras).
Lös fullständigt ekvationen $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2$.

3. I differentialekvationen är funktionerna $p(x)$ och $q(x)$ så valda att
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$
har funktionerna $y_1 = x - 1$ och $y_2 = 1 - \frac{1}{x}$ som lösningar.
Lös fullständigt ekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$.

4. Bestäm termerna t o m grad 10 av potensserielösningen till differentialekvationen
$$y''' - xy = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1.$$

5. a. Uttryck lösningarna till differentialekvationen
$$xy'' + 2y' + 9xy = 0, x > 0.$$
med hjälp av Besselfunktioner.

   b. Bestäm en lösning som uppfyller villkoret $\lim_{x \to 0+} y(x) = 1$. Visa att det bara finns en sådan lösning.

6. Låt $\alpha > 0$ vara ett nollställe till Besselfunktionen J_2. Visa att
   a. $J_1(\alpha) / J_0(\alpha) = \alpha/2$,
   b. $J_1(\alpha) / J_3(\alpha) = -1$
   c. $J_1'(\alpha) / J_1(\alpha) = 1/\alpha$

7. Bestäm ett närmevärde (tre korrekta siffror räcker) för den minsta positiva konstant μ för vilken problemet
$$xy'' - y' + \mu^2 xy = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$
har en icke-trivial lösning.

8. a. Uttryck med hjälp av Besselfunktioner de lösningar till differentialekvationen
$$y'' + \mu^2 xy = 0, x \geq 0,$$
som uppfyller att $y(0) = 0$.

b. Verifiera att

$$y'' + \mu^2 xy = 0,\ y(0) = y(1) = 0,\ 0 \le x \le 1,$$

är ett Sturm-Liouville-problem och ange dess egenvärden och egenfunktioner.

c. Låt $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\phi_n(x),\ c_n \text{ är konstanter},\ 0 \le x \le 1,$$

där $\phi_n(x)$ är egenfunktionerna i b.och f en funktion med kontinuerliga derivator. Ange hur koefficienterna c_n beräknas ur $f(x)$ och $\phi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

9. a. Verifiera att $x^2 y'' + 5xy' - \mu y = 0,\ y(1) = y(\mathrm{e}) = 0,\ 1 \le x \le \mathrm{e}$ är ett Sturm-Liouville-problem och bestäm dess viktsfunktion.

b. Beräkna problemets egenvärden och egenfunktioner.

10. a. I intervallet $-\pi < x < \pi$ gäller

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Beräkna koefficienterna a_n.

b. Vilket värde har *summan* i högra ledet då $x = 4711\pi$?

11. a. I intervallet $-\pi < x < \pi$ gäller

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},\ \text{där } \omega \text{ är ett reellt tal} \ne 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Ange vilket värde summan har då $x = \pi$.

b. Beräkna konstanterna c_n på så enkel form som möjligt.

Ledningar/Svar

1. Substituera: $z = x \cdot y(x)$

   Svar: $y = A\,x + B\,x\,e^x$

2. Dividera ekv med $(x^2 - 1)$ så att koeff. för y''-termen är $= 1$. Använd variation-av-parameter-metoden: Ansätt $y = A(x)\,x + B(x)\,(x^2 + 1)$.

   Man får $M \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 - 1 \end{bmatrix}$, där M är Wronskimatrisen för funktionerna x och $x^2 + 1$.

   Svar: $x^4/6 - x^2/2$

3. Obs p och q behöver ej bestämmas. Använd samma metod som i uppg 2.

   Svar: $(x - 1)(x - \ln|x| + A + B/x)$.

4. Rekursionssambandet blir: $(n + 4)(n + 3)(n + 2)\,a_{n+4} = a_n,\ n \geq 0,\ a_0 = a_1 = a_3 = 0$ och $a_2 = 1/2$.

   Svar: $x^2/2 + x^6/(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2) + x^{10}/(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2) = x^2/2 + x^6/240 + x^{10}/172800$

5. a. Använd tilläggsbladet om transformerade Besselekvationer.

   Svar: $A \dfrac{J_{1/2}(3x)}{\sqrt{x}} + B \dfrac{J_{-1/2}(3x)}{\sqrt{x}}$

   $\left(= A \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\sin 3x}{x} + B \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\cos 3x}{x} = A' \dfrac{\sin 3x}{x} + B' \dfrac{\cos 3x}{x}\right)$

   b. Utnyttja t ex att $J_\nu(t) \quad (x/2)^\nu / \Gamma(\nu + 1)$ då $t \to 0+$ och att $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

   (Se β och/eller läroboken formel (20) sid 222 och (28) sid 225).

   Eller använd att de halvtaliga Besselfunktionerna är elemantära (sid 225)

   Svar: $y = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}} \dfrac{J_{1/2}(3x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sin 3x}{3x}$ är den enda lösningen för vilken $\lim\limits_{x \to 0+} y(x) = 1$.

6. Använd (26) sid 224 i a. med $\nu = 1$, i b. med $\nu = 2$ och (27) i c. med $\nu = 1$, kombinera sedan med resultatet i a.

7. Ekvationens allmänna lösning är $AxJ_1(\mu x) + BxY_1(\mu x)$. Eftersom $\lim\limits_{x \to 0+} xJ_1(\mu x) = 0$ och $\lim\limits_{x \to 0+} xY_1(\mu x) \neq 0$ så måste $B = 0$ och μ vara sådan att $J_1(\mu) = 0$. Minsta positiva nollstället till J_1 avläses i tabell (β eller sid A85).

   Svar: 3.832.

8. a. Använd tilläggsbladet om transformerade Besselekvationer. Allmän lösning till ekvationen är $y = A\sqrt{x}J_{1/3}(2\mu x^{3/2}/3) + B\sqrt{x}Y_{1/3}(2\mu x^{3/2}/3)$.

Svar: $y = A\sqrt{x}\,J_{1/3}(2\mu\, x^{3/2}/3)$.

b. Def av Sturm-Louville-ekv står på sid 233. Och av Sturm-Louville-problem på sid 234. Vårt fall svarar mot att $r(x) = 1$, $q(x) = 0$, $p(x) = x$ och $\lambda = \mu^2$. Randvillkoren är av typen (2), sid 234: $k_1 = l_1 = 1$ $k_2 = l_2 = 0$, $a = 0$ och $b = 0$.
Egenfunktionerna = $A\sqrt{x}\,J_{1/3}(2\mu\, x^{3/2}/3)$ där μ så valt att $x)J_{1/3}(2\mu/3) = 0$, dvs $\mu_n = 3\alpha_n/2$ där α_n = n:te positiva nollstället till $J_{1/3}(t)$.Egenvärdena = $\lambda_n = \mu_n^2$.

Svar: Egenvärden: $9\alpha_n^2/4$, där α_n är det n:te positiva nollstället till $J_{1/3}(t)$.
Egenfunktioner: $\phi_n(x) = \sqrt{x}\,J_{1/3}(\alpha_n x^{3/2})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

c. Tillhörande skalärprodukt är $(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,g(x)\,p(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,x\,dx$ och koefficienterna ges av $c_n = (f, \phi_n)/\|\phi_n\|^2$.

Svar: $c_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,J_{1/3}(\alpha_n x^{3/2})\,x^{3/2}\,dx \Big/ \int_0^1 J_{1/3}{}^2(\alpha_n x^{3/2})\,x^2\,dx$

(*Anmärkning*: Integralen i nämnaren kan evalueras: Subst $\alpha_n x^{3/2} = t$ ger att den är $= 2/3\ \alpha_n^{-2} \displaystyle\int_0^{\alpha_n} J_{1/3}{}^2(t)\,t\,dt$ = (sid 243, (11)) = $1/3\ J_{4/3}{}^2(\alpha_n)$.)

9. a. Ekvationen $a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = 0$ är av Sturm-Liouville-typ om $a' = b$, då kan nämligen ekvationen skrivas: $[ay']' + cy = 0$ med a spelande rollen av r i definitionen på sid 233. Vi försöker därför hitta en funktion $M(x) \neq 0$, så att ekvationen $M(x^2y'' + 5xy' - \lambda y) = 0$ är av denna sort. Detta ger att
$(M\,x^2)' = 5Mx$, dvs $M'/M = 3/x$, varav $M = x^3$.
Den givna ekvationen är därför ekvivalent med
$[x^5y']' - \mu x^3 y = 0$, $y(1) = y(e) = 0$, $1 \le x \le e$ $(r = x^5,\ q = 0,\ p = x^3$ och $\lambda = -\mu$.)
vilket stämmer med def av Sturm-Liouville-problem (sid 233 – 234).
Svar: Viktsfunktion är $p(x) = x^3$.

b. Den givna ekvationen är av Eulertyp med indexekvation $s(s-1) + 5s - \mu = 0$.
Svar: Egenfunktioner $x^{-2}\sin(n\pi \ln x)$, egenvärden $4 + n^2\pi^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

10. a. **Svar**: $a_0 = \dfrac{\sinh \pi}{\pi}$, $a_n = \dfrac{(-1)^2 2\sinh \pi}{\pi(n^2+1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b. $s(4711\pi) = s(\pi) = \dfrac{\cosh \pi + \cosh(-\pi)}{2}$. **Svar**: $\cosh \pi$.

11. **Svar**: $c_n = \dfrac{(-1)^n \sin(\omega\pi)}{\omega - n}$