5B1493, lekt 10

Kontinuerliga funktioner (Rosenlicht kap 4 § 4 – 5)

Kompakthetssatsen

Sats (sid 78)

E kompakt och *f* kontinuerlig **E** → **E´**   *f*(**E**) kompakt

För specialfallet **E´** = **R** har man att ”Kompakt” ⇔ ”Sluten och begränsad” ⇔ ”Sluten och har största och minsta värde”, så satsen utsäger då

Reellvärda kontinuerliga funktioner med kompakt definitionsområde antar alltid ett största och ett minsta värde.

Och ännu mera speciellt:

Om **E** är intervallet $\{x \quad \mathbf{R}; a \le x \le b\}$ och *f* kontinuerlig så antar $f(x)$ ett största och ett minsta värde i intervallet.

Om ”sammanhang” (R: Kap 3, §6, och sid 93 uppg 29)

Definition; Ett metriskt rum **E** är *sammanhängande* om **E** inte kan delas upp i två icke-tomma, disjunkta, öppna mängder, dvs.

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \quad \mathbf{B};\ \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \quad , \mathbf{A} \text{ och } \mathbf{B} \text{ öppna} \quad \mathbf{A} \text{ eller } \mathbf{B} =$$

Exempel på ickesammanhängande mängd på **R**:

$\{x \quad \mathbf{R}; x < 0\} \quad \{x \quad \mathbf{R}; x > 0\}$,

Denna mängd är ju uninionen av de båda icke-tomma, öppna mängderna

$\mathbf{A} = \{x \quad \mathbf{R}; x < 0\}$ och $\mathbf{B} = \{x \quad \mathbf{R}; x > 0\}$ som inte har några gemensamma punkter.

På **R** gäller att (Sid 60 - 61)

R   **I** sammanhängande ⇔ **I** ett intervall (Öppet eller slutet eller halvöppet, begränsat eller obegränsat.)

Generellt gäller

E sammanhängande och *f* kontinuerlig **E** → **E´**   *f*(**E**) sammanhängande.

Speciellt innebär detta för reellvärda funktioner av reell en reell variabel:

Om **E** är intervallet $\{x \quad \mathbf{R}; a \le x \le b\}$ och *f* kontinuerlig så är vädemängden $f(\mathbf{E})$ ett slutet begränsat intervall, $\{y \quad \mathbf{R}; c \le y \le d\}$.

Om kurvor:

Om **I** är ett intervall   **R** och *f* kontinuerlig **I** → **E** (metriskt rum), så säger man att *f*(**I**) är en *kurva* i **E**

Definition; Ett metriskt rum **E** är *bågvis sammanhängande* om det mellan två godtyckliga punkter alltid kan dras en kurva som helt ligger i **E**, dvs.

Om *p* och *q*   **E** så finns en kontinuerlig funktion $\{x \quad \mathbf{R}; a \le x \le b\} \to \mathbf{E}$ sådan att $p = f(a)$ och $q = f(b)$.

För delmängder av **R** är ”sammanhängande” och ”bågvis sammanhängande” samma sak, nämligen att delmängden är ett intervall. Mera generellt gäller dock bara att

E bågvis sammanhängande   **E** sammanhängande

men inte omvändningen. (Se också övn 29(c) sid 93. och övn 10.1 nedan)

Övningar:

Rosenlicht: Kap 4: 11, 14, 16, 26 - 30.

L10.1 Låt **M** vara följande delmängd i planet $\mathbf{R}^2$:

$$\{(x,y);\ y = \sin\frac{1}{x},\ \text{och } x > 0\} \quad \{(x,0);\ x \leq 0\}.$$

Verifiera att den är sammanhängande men inte bågvis sammanhängande.

L10.2 Bevisa:

E är bågvis sammanhängande och f kontinuerlig $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$
E bågvis sammanhängande.

Logiska sammanhang i analysen