5B1993, HT06, lekt 11

**Distansfunktioner på produktrum**

Om $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ där $\mathbf{E}_i$, $i = 1$ , 2, är metriska rum med metrik $d_i$ , så kan **E** på många vis förses med en distansfunktion $D$ som är ”kompatibel” med de olika delmetrikerna i den meningen att

$$D([u,x_2], [v, x_2]) = d_1(u, v)$$

och motsvarande för den andra faktorerna i den Cartesiska produkten.

Ett av de enklare är

$$D(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \qquad [*]$$

**Distansfunktionerna är kontinuerliga**

• För fixt $q$ är funktionen $p \to d(p, q)$ kontinuerlig $\mathbf{E} \to \mathbf{R}$.

Detta följer av att för varje $p_0$   **E** gäller:

$$|d(p, q) - d(p_0, q)| \leq d(p, p_0)$$

• Funktionen $(p, q) \to d(p, q)$ är kontinuerlig $\mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}$.

Detta följer av att för varje $(p_0, q_0)$   $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ gäller:

$$|d(p, q) - d(p_0, q_0)| \leq |d(p, q) - d(p, q_0)| + |d(p, q_0) - d(p_0, q_0)| \leq$$
$$d(q, q_0) + d(p, p_0) = D[(p, q_0), (p_0, q_0)]$$ där $D$ är metriken i $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$.

**För kontinuerliga funktioner *f*: E → E´.**

*Kontinuitetsmodul:*

$$M(\delta) = \sup_{d(x, y) \leq \delta} d´(f(x), f(y)), \ \delta > 0. \ (M(\delta) \text{ kan vara } = \infty)$$

Kontinuitetsmodulen är alltid en växande funktion av δ.

Obs att $d´(f(x), f(y)) \leq M(d(x,y))$ för *alla* $x$ och $y$   **E**.

*Likformig kontinuitet:*

Om $\lim_{\delta \to 0+} M(\delta) = 0$, så säger man att $f$ är *likformigt kontinuerlig*.

Alternativ definition: (Rosenlicht, sid 80)

Till varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta(\varepsilon) > 0$ sådant att
$d´(f(x), f(y)) < \varepsilon$ för *alla* $x$ och $y$ i **E** för vilka $d(x, y) < \delta$.

Jämför detta med definitionen för kontinuitet:

Till <u>varje $x$   **E**</u> och varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta(x,\varepsilon) > 0$ sådant att
$d´(f(x), f(y)) < \varepsilon$ för alla $y$ i **E** för vilka $d(x, y) < \delta$.

Obs: $f$ likformigt kontinuerlig   $f$ kontinuerlig, men det finns kontinuerliga funktioner som inte är likformigt kontinuerliga. Ett enkelt sådant exempel är funktionen $x^2$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

**Kompakthetssatsen för likformig kontinuitet**

Om $f$ är en kontinuerlig funktion $\mathbf{E} \to \mathbf{E}´$ och **E** är kompakt så är $f$ likformigt kontinuerlig.

Rosenlicht ger två bevis för satsen, ett på sidan 80 - 81 och ett på nedre delen av sid 81.

Det senare kan kortas ner om man använder sig av att distansfunktionen $d(p, q)$ är en kontinuerlig funktion $\mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}$:

Beviset är indirekt. Anta att satsen inte är sann. Då finns för någon kontinuerlig funktion $f$ på det kompakta rummet ett tal $\varepsilon > 0$ sådant att det för alla $\delta > 0$, exempelvis för $\delta = \frac{1}{n}$ , finns punkter $x_n$ och $y_n$   **E**, sådana att

$$d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon > 0 \text{ och } d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}.$$

Nu är **E** är kompakt, så den oändliga följden $\{x_n\}_{n\geq 1}$ innehåller en konvergent delföjd $\{x_{n_i}\}_{i\geq 1}$. Gränspunkten kallar vi $x_0$. Men då måste också följden $\{y_{n_i}\}_{i\geq 1}$. vara konvergent med gränspunkten $x_0$, ty

$$0 \leq d(x_0, y_{n_i}) \leq d(x_0, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, y_{n_i}) < d(x_0, x_{n_i}) + \frac{1}{n_i}.$$

I H.L. har man $\lim\limits_{i\to\infty} \left( d(x_0, x_{n_i}) + \frac{1}{n_i} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_0, x_{n_i}) = 0$ och V.L. är $= 0$,

Alltså $\lim\limits_{i\to\infty} d(x_0, y_{n_i}) = 0$, dvs. $\lim\limits_{i\to\infty} y_{n_i} = x_0$.

Eftersom $d'$ är kontinuerlig och sammansättningar av kontinuerliga funktioner alltid är kontinuerliga, så har man

$$\lim_{i\to\infty} d'(f(x_{n_i}), f(y_{n_i})) = d'\Big( f\big( \lim_{i\to\infty} x_{n_i} \big), f\big( \lim_{i\to\infty} y_{y_i} \big) \Big) = d'(f(x_0), f(x_0)) = 0.$$

Men detta strider mot att $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon > 0$ för alla $n$. Satsen är alltså sann.

**Funktionsföljder**. (Rosenlicht: kap 4,§6)

*Definition av punktvis konvergens.*

Om följden $\{f_n\}_{n\geq 1}$ består av funktioner av typen **E** $\to$ **E**´ (metriska rum) så säger man att följden *konvergerar punktvis* mot $f(p)$ om

$$\lim_{n\to\infty} f_n(p) = f(p) \text{ för } \textit{alla } p \quad \mathbf{E}.$$

Man skriver $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

Om funktionerna i följden alla är kontinuerliga och följden konvergent så behöver gränsfunktionen inte vara kontinuerlig.. Några exempel:

1. (R: sid 84) $\mathbf{E} = \{x \quad \mathbf{R}; 0 \leq x \leq 1\}$, $\mathbf{E}' = \mathbf{R}$, . $f_n(x) = x^n$ , $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ då } 0 \leq x < 1 \\ 1, \text{ då } x = 1. \end{cases}$

2. $\mathbf{E} = \mathbf{E}' = \mathbf{R}$, . $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ , $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{då } |x| < 1, \\ 1/2, & \text{då } |x| = 1, \\ 1, & \text{då } |x| > 1. \end{cases}$

Observera att gränsvärdet $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ är något som agerar i *mängden av alla funktioner* **E** $\to$ **E**´ och att vi har definierat denna typ av konvergens utan att mängden i fråga inte är försedd med någon metrik.[1]

**Metrisering av funktionsrum** (R: Sid 88 - 90)

Bertrakta för funktioner $f$ och $g$ av typen **E** $\to$ **E**´ (metriska rum) uttrycket

$$D(f, g) = \sup d( f(p), g(p))$$

Detta är ett slags ”pessimistikt” mått på hur olika funktionerna är.

Under förutsättning att detta supremum existerar (”är ändligt”), vilket vi vet alltid är fallet för kontinuerliga funktioner om **E** är kompakt, så har detta egenskaperna

- $D(f, g)$ reellt $\geq 0$ och $=$ omm $f = g$,
- $D(f, g) = D(g, f)$
- $D(f, g) \leq D(f, h) + D(h, g)$ (Verifiera detta som en övning)

På detta vis kan man metrisera t.ex. mängden av kontinuerliga funktioner av typen **E** $\to$ **E**´, där **E** är kompakt. De konvergenta följderna i dessa metriska rum kallas *likformigt* konvergenta.

1 Man kan fråga sig om det är möjligt att definiera någon metrik på mängden av alla funktioner av typen **R** $\to$ **R** så att den punktvisa konvergensen svarar mot de konvergenta följderna i den metriken. Den saken är utredd och svaret är att det inte finns någon sådan metrik.

En alternativ litet allmännare definition på begreppet är (Se också R; sid 85)

*Definition av likformig konvergens*:

Om följden $\{f_n\}_{n \geq 1}$ består av funktioner av typen $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ (metriska rum) så säger man att följden *konvergerar likformigt* mot $f$ om

det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal $N(\varepsilon)$, *oberoende av $p$* **E**, sådant att

$$d'(f_n(p), f(p)) < \varepsilon \text{ för alla } n > N \text{ och } p \quad \mathbf{E}.$$

**Viktiga observationer och satser**

• Om $f_n \to f$ likformigt, så $f_n \to f$ punktvis.

(Obs att $\varepsilon$-varianten av definitionen av punkvis konvergens lyder:

Om följden $\{f_n\}_{n \geq 1}$ består av funktioner av typen $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ (metriska rum) så säger man att följden *konvergerar punktvis* mot $f$ om

det till varje $\varepsilon > 0$ och varja $p$ **E**, finns ett heltal $N(\varepsilon, p)$, sådant att

$$d'(f_n(p), f(p)) < \varepsilon \text{ för alla } n > N.$$

Den funktion $N(\varepsilon)$ som enligt def av likformig konvergens finns, duger även som den funktion $N(\varepsilon, p)$ som ingår i definitionen av den punktvisa konvergensen.)

• Punktvis konvergens medför i allmänhet inte likformig konvergens.

Exempelvis är följden i ex 1 ovan konvergerar punktvis men

$$D(f_n, f) = \sup_{0 \leq x \leq 1} x^n = 1 \not\to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

• Om följden $\{f_n\}_{n \geq 1}$ består av kontinuerliga funktioner av typen $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ (metriska rum) och konvergerar likformigt mot en funktion $f$, så är också $f$ kontinuerlig. (Se R: sid 87)

Cauchyföljder:

Om $f_n \to f$ likformigt, så finns till varje $\varepsilon > 0$ ett $N(\varepsilon)$ sådant att

$$d'(f_m(p), f_n(p)) < \varepsilon \text{ för alla } m \text{ och } n > N \text{ och } p \quad \mathbf{E}$$

• Om $\mathbf{E}'$ är komplett så har alla Cauchyföljder ett gränsvärde. För kompakta **E** har man då sammanfattningsvis att

– mängden $C(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$† av alla kontinuerliga funktioner med max-metriken beskriven ovan, är ett komplett metriskt rum. De konvergenta följderna i denna metrik är de som konvergerar likformigt.

---

† För fallet $\mathbf{E}' = \mathbf{R}$ används allmänt beteckningen $C(\mathbf{R})$.

*Övningar*:

L11.1 Avgör vilka av följande funktioner som är likformigt kontinuerliga i de angivna intervallen:

a. $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \le x$ b. $f(x) = \ln x$, $0 < x$

c. $f(x) = \sin x$ $x \quad \mathbf{R}$

*Ledningar*: a. Visa t. ex. först att $\sqrt{x + \delta} - \sqrt{x} \le \sqrt{\delta}$ om $x$ och $\delta \ge 0$.

b. Visa t. ex. först att för alla $\delta > 0$ gäller att $\ln (x + \delta) - \ln x \to \infty$ då $x \to 0+$.

c. Användbara trigonometriska samband:

$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}$ och $|\sin x| \le |x|$.

L11.2 a. Verifiera, att om funktionen $f$ är likformigt kontinuerlig på i mängden $\mathbf{M}$ så måste den också vara likformigt kontinuerlig på varje delmängd av $\mathbf{M}$.
b. Verifiera, att om funktionen $f$ är likformigt kontinuerlig i mängderna $\mathbf{M}_1$ och $\mathbf{M}_2$ så måste den också vara likformigt kontinuerlig mängden $\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2$.

L11.3 Visa att om $f(x)$ och $g(x)$ är reellvärda och likformigt kontinuerliga på $\mathbf{E}$ så är också $f(x) + g(x)$ likformigt kontinuerlig på $\mathbf{E}$.
Gäller samma sak för funktionerna $f(x) \cdot g(x)$ respektive $f \circ g(x) = f(g(x))$?
Om $f(x)$ dessutom är inverterbar, måste då även $f^{-1}(x)$ vara likformigt kontinuerlig i sitt definitionsintervall?

L11.4 Visa att om $f(x)$ är kontinuerlig för alla reella $x$ och om funktionen har reella gränsvärden då $x \to \infty$ och $x \to -\infty$, så är den likformigt kontinuerlig på $\mathbf{R}$.

L11.5 Visa att om $f(x)$ är en funktion av en reell variabel, periodisk (dvs. det finns något tal $P > 0$ sådant att $f(x - P) = f(x)$ för alla $x \quad \mathbf{R}$) och kontinuerlig på $\mathbf{R}$, så är $f$ också likformigt kontinuerlig på $\mathbf{R}$.

*Ledning*: Verifiera att $\sup\limits_{d(x,\, y) \le \delta} d(f(x), f(y)) = \max\limits_{\substack{d(x,\, y) \le \delta \\ 0 \le x,\, y \le P}} d(f(x), f(y))$

och utnyttja att intevallet $0 \le x \le P$ är kompakt.

L11.6 Visa att om $f(x)$ är en funktion av en reell variabel, likformigt kontinuerlig i ett *begränsat* (men inte nödvändigtvis slutet) intervall, så är också funktionen begränsad (dvs det finns en konstant $K$ sådan att $|f(x)| \le K$ för alla $x$ i definitionsintervallet).

L11.7 Bestäm för var och en av följande funktioner $f(x)$ de $a$ för vilka $f$ är likformigt kontinuerlig i intervallet $a < x$ :

a. $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ b. $f(x) = \frac{1}{1 + x}$ c. $f(x) = e^{-x}$

*Ledningar*: a. Använd t.ex. resultatet från uppgift 11.4 ovan.

b. Undersök först likformigheten i intervallen $a \le x \le 0$ (för olika $a$) resp. $0 \le x$

L11.8 Låt $f(x) = \sin (x^2)$, $-\infty < x < \infty$.
a. Bestäm samtliga nollställen.
b. Visa att det finns nollställen till $f$ som ligger godtyckligt nära varandra.
c. Bestäm $f$:s kontinuitetsmodul och avgör om funktionen är likformigt kontinuerlig eller ej.

L11.9 Om $M(\delta)$ är en kontinuitetsmodul visa att
a. $M(\alpha + \beta) \le M(\alpha) + M(\beta)$ för alla $\alpha$ och $\beta > 0$.
b. $M(\delta) = \infty$ för alla $\delta > 0$ om $M(\delta_o) = \infty$ för något $\delta_o > 0$.

Dessutom:

Rosenlicht kap 4, sid 94, uppg 22, 23, 33 – 36, 39, 41, 43