5B1993, HT06, lekt 12

Tillbakablick:

Om gränsvärden för funktioner av typ E   I → R:

Definition av gränsvärde:

$\lim_{x \to a} f(x) = A$ betyder att a är hopningspunkt till f:s definitionsmängd **I** och att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta(\varepsilon) > 0$, sådant att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, för alla x som uppfyller $0 < d(x, a) < \delta$.

Alternativ formulering:

För varje omgivning **U**   **R** av A innehåller $f^{-1}(\mathbf{U})$ någon punkterad omgivning (i **I**) av a.

Definition av ogentliga gränsvärden:

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (resp $-\infty$) betyder

att $f(x) > 0$ (resp. < 0) i någon punkterad omgivning av a och

att $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Och speciellt för **E** = **R** (dvs, då f är en reellvärd funktion av en reell variabel):

$\lim_{x \to \infty\,(-\infty)} f(x) = A$ betyder att $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0\,(x < 0)}} f(1/x) = A$

Egenskaper:

I. Beträffande $\lim_{x \to a} f(x)$ gäller alltid precis ett av följande alternativ:

a) $\lim_{x \to a} f(x)$ är ett reellt tal. (Existerar och är *konvergent*)

b) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ eller $-\infty$. (Existerar och är *divergent*)

c) $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar ej (och är *divergent*).

II. (*Aritmetiska lagar*)

Om $f(x)$ och $g(x)$ *konvergerar* då $x \to a$, så gäller

a) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

b) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

c) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

och om $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ i någon punkterad omgivning av a, så gäller också

d) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

III. (*Om olikheter*)

Om $f(x) \leq g(x)$ och $\lim_{x \to a} f(x)$ och $\lim_{x \to a} g(x)$ existerar,

så är

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Därvid görs för oegentliga gränsvärden överenskommelsen att $-\infty < y < \infty$ för alla reella y.

IV. (*Instängningsprincipen*)

Om $f(x) \le h(x) \le g(x)$ och

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = A$$

och $h(x)$ är definierad åtminstone i någon punkterad omgivning till a,

så är också $$\lim_{x \to a} h(x) = A.$$

V. (*Substitutionsprincipen)*

Om

$$t = g(x) \to T \text{ då } x \to a \text{ och } y = f(t) \to A \text{ då } t \to T$$

så gäller att

$$y = f(g(x)) \to A \text{ då } x \to a.$$

VI. (*Om inversa funktioner*)

Om f är inverterbar (dvs. en injektion), så är

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \lim_{y \to A} f^{-1}(y) = a.$$

VII. (*Samband med punktföljders konvergens*)

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

om och endast om

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

för varje punktföljd $\{x_n\}_{n \in N}$ i f:s definitionsmängd

sådan att $x_n \to a$ då $n \to \infty$ och $x_n \neq a$.

VIII. (*Samband gränsvärde – kontinuitet*)

$$f \text{ är kontinuerlig för } x = a \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \left(= f\big(\lim_{x \to a} x\big)\right)$$

IX. (*Principen om monoton konvergens*)

För växande (resp avtagande) reellvärda funktioner av en reell variabel (dvs. då **E** = **R**) gäller att gränsvärdet

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

alltid existerar och att det är reellt (dvs är konvergent) om och endast om f är uppåt (resp. nedåt) begränsat.

Övningar:

De följande övningarna går ut på att *utifrån principerna I – XI ovan* visa, att de ”vanliga” elementära funktionerna är kontinuerliga.

L12.1 Motivera varför alla polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

är kontinuerliga funktoner $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

L12.2 Motivera varför alla rationella uttryck

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

är kontinuerliga funktioner.

L12.3 Härled, att om a_n och $b_m \neq 0$ för $r(x)$ i den föregående uppgiften, så är

$$\lim_{x \to \infty} r(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } m > n, \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{om } m = n, \\ \infty, & \text{om } m < n \text{ samt } a_n \text{ och } b_m \text{ har samma tecken,} \\ -\infty, & \text{om } m < n \text{ samt } a_n \text{ och } b_m \text{ har olika tecken.} \end{cases}$$

L12.4 Bevisa att de trigonometriska funktionerna sin x, cos x, tan x och cot x är kontinuerliga. (Definitionerna av uttrycken ifråga liksom ”elementära” trigonometriska samband, som additionssatser, produksatser m.m. får anses bekanta (= tidigare visade).)

L12.5 Bevisa att de cyklometriska funktionerna arcsin x, arccos x, arctan x och arccot x är kontinuerliga.

L12.6 Bevisa att funktionen a^x (a konstant > 0) är kontinuerlig. (Potenslagarna får anses vara bekanta och likaså att funktionen $t \to \dfrac{a^t - 1}{t}$ är växande för alla t **R**)

L12.7 Bevisa att $x \to \log_a x$, a en konstant > 0 och ≠ 1, är en kontinuerlig funktion.

L12.8 Bevisa att $x \to x^\alpha$, där α är konstant och $x > 0$, är en kontinuerlig funktion.

L12.9 Vilka av funktionerna i uppgifterna L12.1 – 8 är likformigt kontinuerliga på hela **R**?