5B1993, HT06, lekt 13

Om derivator

(Ch V)

Definition av derivata för funktioner av typen $\mathbf{R} \to{:}\mathbf{R}$ (Jmfr sid 98):

”Klassisk” formulering:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$. (Andra beteckningar $\frac{df}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$)

f är *deriverbar* i en öppen mängd **U** om derivatan existerar i alla mängdens punkter.

(Geometriskt motsvarar derivatan sombekant lutningen hos den ickelodräta tangent grafen för f har i punkten $(x_0, f(x_0))$. Om grafen inte har någon tangent i punkten eller om den är lodrät så finns det ingen derivata i punkten. Ibland säger man dock i det senare fallet att derivatan är = ∞.)

”Modernare” formulering:

Om det till $f(x)$, definierad i en omgivning av punkten x_0, finns ett tal A, sådant att det för varje $\varepsilon > 0$ finns en omgivning till x_0 där

$$|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)| \leq \varepsilon\, |x - x_0|$$

så är detta (unika) tal A (betecknat $f'(x_0)$) derivatan av f i punkten x_0.
(Funktionen $(x - x_0) \to f'(x_0)\,(x - x_0)$ kallas *differentialen* av f, df. Ofta skriver man dx för variabeln $x - x_0$, dvs $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$.)

Geometriskt innebär deriverbarhet att om ett stycke av grafen zoomas in alltmer mot punkten $(x_0, f(x_0))$, så kommer den grafsnutten att bli alltmer lik en ickelodrät rät linje – tangentlinjen till grafen i den punkten. Denna linjes lutning är derivatan. Om inzoomningen ger en lodrät linje eller någon annan geometrisk figur än en rät linje – tänk t.ex. på fallet $f(x = |x|$ i $x = 0$ – så finns ingen derivata i punkten.

Vid moderna definitionen sneglar på möjligheten att generalisera derivatbegreppet till funktioner av typen $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ (och ännu allmännare för funktioner mellan linjära rum med metrik definierad via någon norm):

Om det till $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, av typen $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ och definierad i en omgivning av punkten $\boldsymbol{x_0}$, finns en *linjär avbildning* (*matris*) $\boldsymbol{A}$ av typen $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, sådan att det för varje $\varepsilon > 0$ finns en omgivning till $\boldsymbol{x_0}$ där

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})| \leq \varepsilon\, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|,$$

så är denna (unika) avbildning (matris) $\boldsymbol{A}$ $\left(\text{betecknad } \frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x_0})\right)$ derivatan av $\boldsymbol{f}$ i punkten $\boldsymbol{x_0}$.

Funktionen sägs då vara *differentierbar* i punkten $\boldsymbol{x_0}$ och dess *differential* är funktionen

$$d\boldsymbol{f} = \left(\frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x_0})\right) d\boldsymbol{x}, \text{ där } d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}.$$

Detta tema tar vi upp senare (Ch IX i Rosenlicht).

De allmänna deriveringsreglerna

Aritmetiska regler

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \quad c \text{ konstant}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

Sammansättning

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Inversfunktion

$$\left(g^{-1}(x)\right)' = \left[\frac{1}{g'(y)}\right]_{y=g^{-1}(x)}$$

Derivator för elementära funktioner

$D\,c$	$= 0$, c konstant		
$D\,x^{\alpha}$	$= \alpha x^{\alpha-1}$, α konstant		
$D\,a^{x}$	$= (\ln a)\, a^{x}$, a konstant	$D\, \log_a\lvert x\rvert$	$= (\log_a e)/x$
$D\,e^{x}$	$= e^{x}$	$D \ln \lvert x\rvert$	$= 1/x$
$D \sin x$	$= \cos x$	$D \arcsin x$	$= 1/\sqrt{1-x^2}$
$D \cos x$	$= -\sin x$		
$D \tan x$	$= 1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$	$D \arctan x$	$= 1/(1+x^2)$

Begreppen ”monoton” och ”konvex”

f (av typen $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$) sägs vara *växande* (resp. *strängt växande)* i ett intervall om för alla u och v i intevallet gäller att

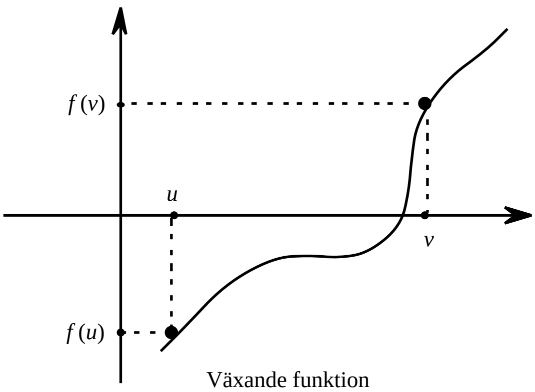
$$u < v \qquad f(u) \le f(v), \ \text{(resp. } f(u) < f(v)\text{)},$$

Motsvarnde definition för *avtagande* funktion. Om en funktion är växande eller avtagande kallas den också *monoton*.

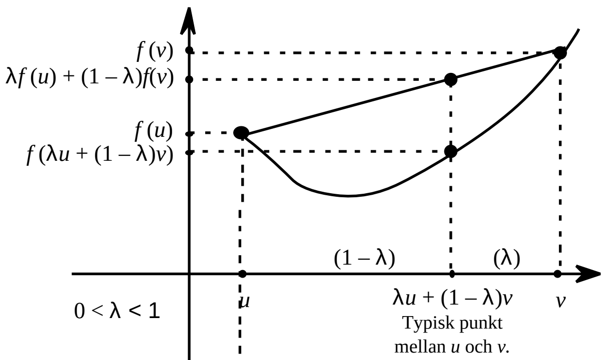
f (av typen $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$) sägs vara *konvex* (resp. *strängt konvex*) i ett intevall om för alla u och v i intevallet och för alla $0 < \lambda < 1$ gäller att

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v)) \le \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v), \ \text{(resp. } f(\lambda u + (1-\lambda)v)) < \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)\text{)},$$

Motsvarande definition för *konkav* funktion.



Växande funktion



Konvex funktionsgraf

Man kan visa att om f är deriverbar i ett öppet intervall så är

f (strängt) konvex $\Leftrightarrow$ f' (strängt) växande $\Leftrightarrow$ För alla x och x_0 i intervallet gäller

$$f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \ \text{(resp. < utom då } x = x_0 \text{ i det stränga fallet.)}$$

Det senare villkoret utsäger att en konvex funktions graf alltid ”ligger över” alla sina tangentlinjer.

Allmänna satser om deriverbara funktioner

Rolles sats

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ deriverbar i} \\ \text{intervallet } (a,b) \\ \text{och kontinuerlig} \\ \text{också i } a \text{ och } b. \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} f\,'(x) \text{ har nollställe i} \\ \text{intervallet } (a,b). \end{array}\right.$$

Medelvärdessatsen

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ deriverbar i} \\ \text{intervallet } (a,b) \\ \text{och kontinuerlig} \\ \text{också i } a \text{ och } b. \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Finns punkt } c \text{ i intervallet } (a,b) \\ \text{sådan att} \\ \quad f(b) - f(a) = f\,'(c)(b-a) \end{array}\right.$$

Monotonitetssatser

- Om $f(x)$ är deriverbar i intervallet (a,b) så gäller:

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x) \left\{\begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \end{array}\right\} \\ \text{i intervallet} \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} f(x) \left\{\begin{array}{l} \text{växande} \\ \text{avtagande} \end{array}\right\} \\ \text{i } (a,b) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x) = 0 \\ \text{i intervallet} \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ konstant i} \\ \text{intervallet} \end{array}\right.$$

- Om $f(x)$ är 2 ggr deriverbar i intervallet (a,b) så gäller:

$$\left.\begin{array}{l} f\,''(x) \left\{\begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \end{array}\right\} \\ \text{i intervallet} \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} f(x) \left\{\begin{array}{l} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{array}\right\} \\ \text{i intervallet} \end{array}\right.$$

Om extremvärden

- $$\left.\begin{array}{l} x = c \text{ är en lokal} \\ \text{extrempunkt till } f(x) \\ \text{i intervallet } (a,b) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Ett av följande gäller:} \\ \text{I. } f\,'(c) = 0, \\ \text{II. } f(x) \text{ ej deriverbar} \\ \qquad \text{för } x = c. \end{array}\right.$$

- $$\left.\begin{array}{l} f\,'(c) = 0 \text{ och} \\ f\,''(c) > 0\ (< 0) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} c \text{ lokal minimi-} \\ \text{(maximi-) punkt} \end{array}\right.$$