5B1493, VT07, lekt 15

Riemannintegraler

(Ch VI)

Definition av Riemannintegral för funktioner av typen **R** $[a, b] \rightarrow$ **R** (Jmfr sid 112):

Förberedande definitioner:

En *indelning* **I** (*partition*) av intervallet $[a, b]$ ges av ett ändligt antal tal $x_0, x_1, \ldots, x_N$ sådana att

$$a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_{N-1} < x_N = b.$$

En indelnings *diameter* δ (*width*) är längden av det längsta indelningsintervallat, dvs.

$$\delta = \max_{i=1,\ldots N} (x_i - x_{i-1})$$

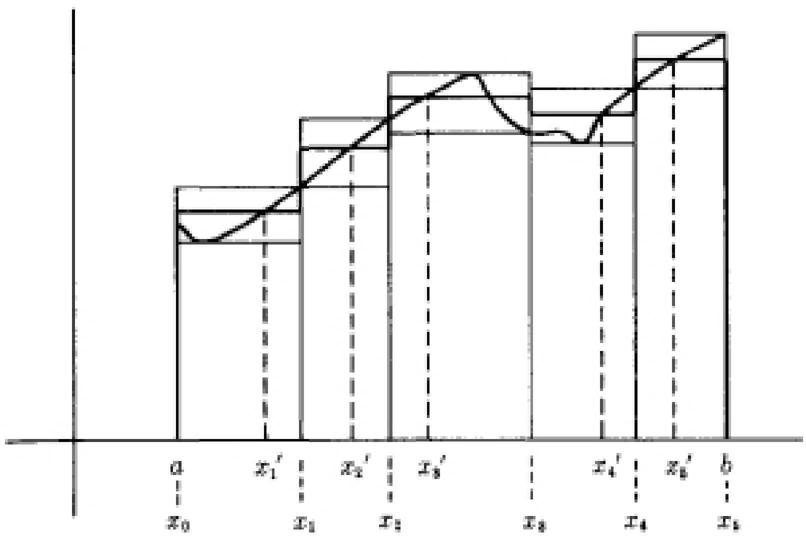
Låt $f(x)$ vara en funktion $[a, b] \rightarrow$ **R**, låt

$$a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_{N-1} < x_N = b.$$

vara en indelning av $[a, b]$ och låt $x_i{'}$, $i = 1, \ldots, N$, vara tal i intervallen $x_{i-1} \leq x_i{'} \leq x_i$,

då är
$$S = \sum_{i=1}^{N} f(x_i{'})\,(x_i - x_{i-1})$$

en *Riemannsumma* till f (i intervallet $[a, b]$).



Definition av *Riemannintegral*:

Om f: $[a, b] \rightarrow$ **R** och det finns ett tal A sådant att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$, sådant att för *varje* Riemannsumma S med diameter $< \delta$ gäller

$$|S - A| < \varepsilon,$$

så kallas detta tal A (som måste vara unikt – tänk efter varför!) (*Riemann-*)*integralen* av f över intervallet $[a, b]$, och skrivs

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funktionen sägs då vara *integrerbar*.

De funktioner som är konstanta på varje indelningsintervall i en indelning av $[a, b]$ kallas *sträckvis konstanta*. En sträckvis funktion är *överfunktion* $V(x)$ resp. *underfunktion* $U(x)$ om

$$U(x) \leq f(x) \leq V(x).$$

Observation: (Jmfr ex 3 och prop på sid 116)

De sträckvis konstanta funktionerna är integrerbara.

Proposition (sid120)

$f(x)$ är intgrerbar i $[a, b]$ om och endast om det till varje $\varepsilon > 0$ finns en överfunktion $V(x)$ och en underfunktion $U(x)$, sådan att

$$\int_a^b (V(x) - U(x))\, dx < \varepsilon$$

(Intuitivt: f är integrerbar om och endast om f:s graf kan stängas in i ett ändligt antal axelparallella rektanglar, vars sammanlagda area kan vara hur liten som helst.)

Exempel på funktioner som inte är integrerbara:

a. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ i $0 \leq x \leq 1$,

b. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, i $0 \leq x \leq 1$,

c. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{då } x \text{ rationellt,} \\ 0, & \text{då } x \text{ irrationellt,} \end{cases}$ i $0 \leq x \leq 1$,

I a-fallet kan situationen ”räddas” . Visserligen existerar det inget tal $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$. på det sätt definitionen anger, men däremot är funktionen integrerbar över alla intervall

$$X \leq x \leq 1, \text{ där } 0 < X < 1: \quad \int_X^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx. = 2(1 - \sqrt{X}).$$

varför $\displaystyle\lim_{X \to 0+} \int_X^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx. = 2$. Man säger i att funktionen är *generaliserat* Riemannintegrerbar och skriver i alla fall att $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$.

Viktiga integrabla klasser av funktioner:

f är *kontinuerlig* på $[a, b]$ f integrerbar på $[a, b]$. (Sats sid 123 och övn 5)

Mera generellt:

Om **I** är en indelning av $[a, b]$ och f är kontinuerlig och begränsad på varje indelningsintervall, (x_{i-1}, x_i), så är f integrerbar på $[a, b]$.

(Sådana funktioner kallas *styckvis kontinuerliga*.)

f är *monoton* på $[a, b]$ f integrerbar på $[a, b]$. (ChVI, övn. 8)

Viktigare allmänna egenskaper (se §4).

Om $f(x)$ och $g(x)$ är integrabla, så är

(i) $\displaystyle\int_a^b (k\, f(x) + l\, g(x))\, \mathrm{d}x = k \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + l \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$, ($k$ och l konstanter),

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$,

(iii) $f(x) \geq g(x)$ för $a \leq x \leq b$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$,

och speciellt, om $f(x) \geq 0$, så är $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \geq 0$,

(iv) (Triangelolikheten för integraler)

$$\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x.$$

(v) (Integralkalkylens huvudsats) Jmfr Cor 2, sid 127.
Om $f'(x)$ är integrerbar i intervallet (a, b) och f är kontinuerlig även då $x = a$ och $x = b$, så är

$$\int_a^b f'(x)\, \mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

(vi) (Integralkalkylens medelvärdessats) (Ch VI, övn 12 JmrCor 2, sid118)
Om f är kontinuerlig i $[a, b]$ så finns ett c (a, b) sådant att

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = f(c)\,(b - a).$$

(vii) (Existens av primitiv funktion, ”antiderivata”), Cor 1 , sid 127
Om f är kontinuerlig i $[a, b]$ så är

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

($viii$) (Partiell integration) (Övn 17)
Om f och g är kontinuerliga i $[a, b]$ och har styckvisa derivator som är integrerbara, så är

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = (f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a)) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x.$$

.

(ix) (Substitution) Cor 3, sid 128.
Om f är kontinuerlig i ett öppet intervall U och ϕ kontinuerlig i ett öppet intervall V : $V \to \phi(V)$ U samt g har en integrerbar derivata så gäller för godtyckliga a och x V,

$$\int_a^x f(\phi(u))\, \phi'(u)\, \mathrm{d}u = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(x)} f(v)\, \mathrm{d}v.$$

Övningar:

Rosenlicht, Ch VI, sid 132 ff.

1, 5, 6, 8 11, 13, 19 (Taylors formel)

15.1. (Integraluppskattning av summor)

Visa att om $f(x) > 0$ är en avtagande funktion och M och N heltal $M < N$, så är

$$f(N) \leq \sum_{n=M}^{N} f(n) - \int_M^N f(x)\,dx \leq f(M)$$

samt att motsvarande med ombytta olikheter gäller om f är växande:

$$f(M) \leq \sum_{n=M}^{N} f(n) - \int_M^N f(x)\,dx \leq f(N)$$

Ledninmg: Rita figurer! Åskådliggör summorna genom att låta termerna svara mot staplar med bredden 1.

Använd detta för att lösa uppgifterna 21 och 22 i Rosenlicht: I 21a uppskatta summan i täljaren genom att studera funktionen $f(x) = x^k$, i 21b $f(x) = \frac{1}{n+x}$.

I 22 välj $f(x) = \frac{1}{x}$ för att visa att talföljden $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ är positiv och visa att följden är avtagande genom att visa att $c_{n+1} - c_n < 0$.

Mera i Rosenlicht 26, 27 , 28.