5B1493, VT07, lekt 16

Riemannintegraler

(Ch VI)

Logiska samband angående integralkalkylens huvudsats och primitiva funktioner:

Differentialkalkylens medelvärdessats (s.105)

$\downarrow$

Huvudsatsen (jmfr s 127)
f' är integrabel i $[a, b]$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$\downarrow$

$F(x)$ och $G(x)$ primitiva funktioner till $f(x)$

$F(x) = G(x) + C$

Definition av kontinuitet, derivata och integral.
Enklare egenskaper hos integral

$\downarrow$

Existens av primitiv funktion:
$f(x)$ kontinuerlig i $[a, b]$

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

är primitiv funktion till $f(x)$, (sid 126).

Anmärkning:

- Det är satserna till vänster som man använder vid integralevaluering.
- Diskontinuerliga funktioner har i allmänhet inte några primitiva funktioner. Betrakta t ex fallet $f(x) = 0$, då $x < 0$ och $= 1$ om $x \geq 0$.
  Jmfr också övningen nedan, vars resultat bl.a.medför att inga funktion med språngdiskontinuiteter kan ha en primitiva funktion.

Taylors formel: (Övn 19, sid 134, se också sid 107)

Om $f(x)$ har kontinuerliga derivator åtminstone upp till ordning $n + 1$ i en omgivning av $x = a$, så gäller i den omgivningen att

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

$$\text{där } R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ och } \xi \text{ något tal mellan } a \text{ och } x.$$

Obs! Även om f skulle ha derivator av godtycklig ordning (vara ”oändligt deriverbar”), så är relationen

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots\dots$$

i allmänhet *inte* sann! (Se övning 26 s. 135)

Övning:

(Satsen om mellanvärden för derivator)

Visa att om f är deriverbar i (a, b) och f' antar värden c och d i intervallet, så antar f' också varje värde mellan c och d. (Obs att en derivata inte behöver vara kontinuerlig.)

Ledning: Låt t (c, d). Bilda hjälpfunktionen $F(x) = f(x) - tx$, visa att F måste ha ett minsta värde i $[c, d]$ och att minimipunkten inte kan vara c eller d.