Mer om Taylors formel
Elementtära funktioner på ”modernt” vis
(Ch VI, §5)

Taylors formel (MacLaurins variant):

Om $f(x)$ har kontinuerliga derivator åtminstone upp till ordning $n + 1$ i en omgivning av $x = 0$, så gäller i den omgivningen att

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$\text{där } R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \text{ och } \xi \text{ något tal mellan 0 och } x.$$

Resttermens ”storleksordning”

Generellt gäller att

$$\lim_{x \to 0} \frac{|R_n(x)|}{|x^n|} = 0.$$

Bevis: (För det fall att $f^{(n+1)}(x)$ är kontinuerlig i en omgivning av origo)
Enligt ovan är

$$\frac{|R_n(x)|}{|x^n|} = \frac{|(f^{(n+1)}(\xi)|)}{(n+1)!|x^n|}|x|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!}|x|,$$

där M är en ovre begränsning till $f^{(n+1)}(x)$ i någon omgivning av origo, varav påståendet följer.

Entydighetssatsen:

Det s.k. *MacLaurinpolynomet*

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

är unikt i följande mening:

Om

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + S_n(x),$$

där

$$\lim_{x \to 0} \frac{|S_n(x)|}{|x^n|} = 0,$$

så är

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Bevis: Om den sistnämnda relationen inte skulle vara sann, så finns ett minsta index, $k = p$, för vilket

$$c_k - \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \ne 0.$$

För differensen mellan MacLaurinutvecklingen och omskrivningen med c-koefficienterna ovan gäller då

$$0 = f(x) - f(x) = \left(c_p - \frac{f^{(p)}(0)}{p!}\right)x^p + (\text{polynom}) \cdot x^{p+1} + S_n(x), - R_n(x),$$

Division med x^p åtföljt av att man låter $x \to 0$ ger motsägelsen $c_p - \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!} = 0$. Satsen är alltså sann.

Anmärkning: Entydighetssatsen gör det möjligt att skaffa fram MacLaurin- (och därmed Taylor-)utveckligar för funktioner där derivatorna $f^{(n)}(x)$ är svåra att skriva upp för godtyckliga x.

MacLaurinserier:

En funktion som är obegränsat deriverbar i en omgivning av origo är = sin Maclaurinserie

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots\ldots \qquad [1]$$

för ett visst x om och endast om

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

(Obs! Här är x fixt och gränsvärdet tas med avseende på indexvariabeln n. Vid betraktelserna i samband med entydighetssatsen ovan var det tvärtom, där är n fixt och x varieras.)

Ett *tillräckligt* (men inte nödvändigt) villkor för att [1] skall gälla är att det i någon omgivning av origo finns en gemensam övre begränsning M för alla derivatorna. Då gäller [1] i den omgivningen.

Övningar:

17.1 Bevisa det sistnämnda påståendet ovan.

17.2 Använd identiteten

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}, \text{ då } t \neq 1$$

För att bestämma MacLaurinutvecklingen av $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Bestäm också det största öppna intervall inom vilket relationen [1] gäller.

17.2 Samma som förra uppgiften, fast med $f(x) = \arctan x$.

I Ch VI, §5 ges ”modernare” definitioner av funktionerna ln x, e^x och x^α $(\alpha \quad \mathbf{R})$. Följande övningar ger en skissartad framställnimng av hur man skulle kunna definiera de cyklometriska och trigonometriska funktionerna i samma anda:

17.3 Definiera

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \text{ och } \pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

a. Verifiera att arctan x är strängt växande och udda.

b. Visa att $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. $\left(\textit{Ledning}: \text{Substituera } t = \dfrac{1}{s} \text{ i } \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt.\right)$

c. Visa att $\arctan \dfrac{2x}{1-x^2} = 2 \arctan x$, då $|x| < 1$.

$\left(\textit{Ledning}: \text{Substituera } t = \dfrac{2u}{1-u^2} \text{ i integralen } \displaystyle\int_0^{2x/(1-x^2)} \frac{1}{1+t^2}\,dt\,.\right)$

17.4 Definiera

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt, \text{ då } -1 < x < 1.$$

a. Verifiera att arcsin x är strängt växande och udda.

b. Verrifiera att $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ [1]

c. Visa att $\lim_{x \to 1-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

17.5 Låt tan x vara inversen av funktionen arctan x definierad enligt 17.3.

a. Verifiera är den funktionens definitionsmängd är $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Vilken är dess värdemaängd?

b. Verifiera att $\frac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x$.

c. Definiera för $-\pi/2 + n\pi < x < \pi/2 + n\pi$: $\tan x = \tan(x - n\pi)$ och verifiera att deriveringsformeln stämmer även för denna utökat definierade funktion.

d. Använd resultatet i 17.3c för att visa att

$$\frac{2\tan(x/2)}{1 - \tan^2(x/2)} = \tan x, \text{ då } x \neq n\pi.$$

17.6 Att definiera sin x som invers till arcsin-funktionen i 17.4 är inte alldelas tillfredsställande. Varför? Definiera i stället för $x \neq n\pi$

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

Visa att denna funktion kan definieras också då $x = n\pi$ så att den blir kontinuerlig i hela **R**.

17.7 Definiera på liknande sätt för $x \neq n\pi$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

Visa att också denna funktion kan definieras då $x = n\pi$ så att den blir kontinuerlig i hela **R**

---

[1] Detta är övning 18 på sid 133.

17.8 Verifiera att

a. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,

b. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

c. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$ och $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$.

d. Verifiera att funktionen $f(x) = \sin x,\ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ är strängt växande och att för dess invers gäller

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{och } f^{-1}(0) = 0,$$

varför f^{-1} är identisk med funkionen arcsin som den definierats i 17.4.