5B1493, VT07, lekt 18

**Omkastning av gränsprocesser**

**Litet om serier**

Ch VII

Om man utför två gränsprocesser med avssende på två olika variabler efter varandra, spelar det i allmänhet roll i vilken ordning man tar dem:

*Exempel*: Om $$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

så är $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1,$$

men $$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1. \qquad \text{(Kontrollera!)}$$

Av intresse är därför att hitta något så när allmänna och lätttanvända kriterier på när sådan omkastning ändå är tillåten. Viktiga situationer där två gränsprocesser är inblandade är bl.a. de följande (tecknet står för ”likhet önskas”):

*lim/lim:* $$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) \qquad \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{[A]}$$

*lim/integral:* $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\,\mathrm{d}x \qquad \text{[B]}$$

*lim/generaliserad integral:* $$\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_a^\infty [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\,\mathrm{d}x \qquad \text{[C]}$$

*lim/derivata:* $$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' \qquad \text{[D]}$$

*lim/serie:* $$\lim_{x\to a}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] \qquad \sum_{n=1}^{\infty}[\lim_{x\to a} u_n(x)] \qquad \text{[E]}$$

*integral/serie:* $$\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]\mathrm{d}x \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{[F]}$$

*derivata/serie:* $$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \qquad \text{[G]}$$

*derivata/derivata:* $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \qquad \text{[H]}$$

*deriveta/integral* $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{[I]}$$

.

Ett hjälpmedel i detta sammanhang är det man kallar *likformig konvergens* (ch IV, sid 85). Scenariot är att man har en funktion $F(x, y)$ av typen $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{M}$, där $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ och $\boldsymbol{M}$ kan vara metriska rum eller t.ex mängden av naturliga tal **N**.[1]

Om $\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = g(y)$ där $y$ $\boldsymbol{Y}$**,** så säger man att konvergensen är likformig i $\boldsymbol{Y}$ om

det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta(\varepsilon) > 0$, sådant att *för alla* $y$ $\boldsymbol{Y}$ gäller

$0 < d(x, a) < \delta \quad d(f(x,y), g(y)) < \varepsilon$. (2

Om $\boldsymbol{X} = \mathbf{N}$ får definitionen modifieras litet av formella skäl:

Om $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(y) = g(y)$ där $y$ $\boldsymbol{Y}$ så säger man att konvergensen är likformig i $\boldsymbol{Y}$ om

det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\mathrm{N}(\varepsilon) > 0$, sådant att *för alla* $y$ $\boldsymbol{Y}$ gäller

$n > N \quad d(f_n(y), g(y)) < \varepsilon$.

*Sats*: (Tillräckligt villkor för omkastning av gränsprocesser)

Om $f(x, y)$ konvergerar likformigt $g(y)$ i $\boldsymbol{Y}$ då $x \to a$,
$f(x, y) \to h(x)$ då $y \to b$ och
$h(x) \to A$, då $x \to a$,
så gäller att

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = A \left( = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) \right)$$

*Bevis* Vi vet enligt antagandena följande:

- Till varje $\varepsilon_1 > 0$ finns ett $\delta_1(\varepsilon_1) > 0$ (oberoende av $y$), sådant att
  $0 < d(x, a) < \delta_1 \quad d(f(x,y), g(y)) < \varepsilon_1$.
- Till varje $\varepsilon_1 > 0$ finns ett $\delta_2(\varepsilon_1, x) > 0$ (eventuellt beroende av $x$), sådant att
  $0 < d(y, b) < \delta_2 \quad d(h(x), f(x, y)) < \varepsilon_1$.
- Till varje $\varepsilon_1 > 0$ finns ett $\delta_3(\varepsilon_1) > 0$ , sådant att
  $0 < d(x, a) < \delta_3 \quad d(h(x), A) < \varepsilon_1$.

Vi vill visa att $\lim\limits_{y\to b} g(y) = A$, dvs. att

° Till varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta(\varepsilon) > 0$ , sådant att
$0 < d(y, b) < \delta \quad d(A, g(y)) < \varepsilon$. [1]

Alltså: Betrakta $d(A, g(y))$, Enligt triangelolikheten för distansfunktionen $d$ kan man skriva

$d(A, g(y)) \leq d(A, h(x)) + d(h(x), f(x, y)) + d(f(x, y), g(y))$ [2]

Låt $\varepsilon_1 > 0$. Välj först $\varepsilon_1 > 0$ så att $0 < d(x, a) < \delta_1 \quad d(f(x,y), g(y)) < \varepsilon_1$ för alla $y$. [3]

Välj sedan $\delta_3(\varepsilon_1)$ så att $0 < d(x, a) < \delta_3 \quad d(A, h(x)) < \varepsilon_1$. [4]

och till sist, för något $x$ som uppfyller [3] och [4], välj $\delta_2(\varepsilon_1, x)$ så att

$0 < d(y, b) < \delta_2 \quad d(h(x), f(x, y)) < \varepsilon_1$.

För $y$ som uppfyller att $0 < d(y, b) <$ det minsta av talen $\delta_1$, $\delta_2$ och $\delta_3$ så gäller nu enligt [2] att

$d(g(y), A) < 3\varepsilon_1$

Villkoret [1] är alltså uppfyllt om man till givet $\varepsilon > 0$ väljer

$\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon_1/3), \delta_2(\varepsilon_1/3, x), \delta_3(\varepsilon_1/3))$ ■

---

1 Om $\boldsymbol{X}$ skulle vara = **N**, så skriver man hellre $F_n(y)$ i stället för $F(x, y)$.

2 Intuitivt: Om $x$ ligger ”tillräckligt nära $a$”, så ligger $f(x, y)$ “nära” $g(y)$ *”samtidigt”* för alla $y$.

Detta handlar om fallet [A].

För övriga fall har man likhet vid liknande tillräckliga villkor

[B] om $f_n(x)$ är integrerbar och konvergerar likformigt mot $f(x)$, (sid138)

[C] om $f_n(x)$ är integrerbar och konvergerar likformigt mot $f(x)$, samt $|f_n(x)| \leq g(x)$ för någon funktion för vilken $\int_a^{\infty} g(x)\,dx < \infty$,

[D] om $f_n(x)$ konvergerar och $f_n'(x)$ kontinuerliga och konvergerar likformigt då $n \to \infty$, (sid 140)

[E] om serien (dvs. dess partialsummor) konvergerar likformigt, (sid 150)

[F] som i [E] med tillägget att termerna $u_n(x)$ är integrabla, (sid 150)

[G] om $u_n$- serien konvergerar , $u_n'$-serien konvergerar likformigt samt $u_n'$ kontinuerliga, (sid 150)

[H] om de båda andraderivatorna är kontinuerliga, (övn 36)

[I] gäller för $c \leq y \leq d$ om $f(x, y)$ och $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ är kontinuerliga funktioner på $[\alpha, \beta] \times [c, d]$. (sid 159).

Ett vanligt sätt att bevisa att en viss konvergens är likformig, går ut på att man besatämmer

$$M(x) = \max \text{ (eller sup) } d(f(x, y), g(y)) \text{ då } y \quad \boldsymbol{Y}.$$

Konvergensen är likformig i $\boldsymbol{Y}$ om och endast om $M(x) \to 0$, då $x \to a$.

För funktionsserier är följande tilltäckliga villkor för likformig konvergens ofta användbar (Sid 150)

Om $|u_n(x)| \leq a_n$ för $x \quad \boldsymbol{U}$ och den numeriska serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent, så konvergerar funktions-serien likformigt i $\boldsymbol{U}$.

*Övningar*:

18.1 Bestäm för följande funktionsföljder $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ de $x$ för vilka de är konvergenta, då $n \to \infty$, ange gränsfunktionen och för vilka slutna intervall som konvergensen är likformig:

a. $f_n(x) = x^n$ b. $f_n(x) = e^{-nx^2}$ c. $f_n(x) = \arctan(nx)$

d. $f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^n$ e. $f_n(x) = e^{-x}\left(\frac{x}{n}\right)^n$ f. $f_n(x) = e^{-x}\left(\frac{ex}{n}\right)^n$

g. $f_n(x) = \frac{1 + x^n}{1 + x^{2n}}$

18.2 Bestäm för följande funktionsserier de $x$ för vilka de är konvergenta och ange för vilka slutna intervall som konvergensen är likformig:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + x^n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$

18.3 Beräkna

a. $\lim_{n \to \infty} \int_1^2 e^{-nx^2}\,dx$ b. $\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} e^{-nx^2}\,dx$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{n}\, e^{-nx^2}\, dx$  d. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{2} \frac{1}{\arctan(nx)}\, dx$

Rosenlicht ch VII, sid160: 1, 3, 25, 35

*Ledning till 25*: Notera först att det finns $(n + m - 1)$ st termer $\frac{1}{(n+m)!}$ i serien. Använd detta för i första hand visa att seriesumman $= \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$ .

Betrakta sedan potensserien $s(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!} x^{k-2}$ (där $s(1)$ är den sökta summan) och notera att denna är derivatan av $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k-1}$, en serie som kan summeras.

*Svar:*

18.1 **P** betecknar mängden där följden är punktvis konvergent och $f(x)$ gränsfunktionen.

a. **P** = $(-1, 1]$, $f(x) = 0$ om $x \neq 0$ och $f(1) = 1$; likformigt konvergent i alla slutna delintervall av intervallet $(-1, 1)$.

b. **P** = **R**, $f(x) = 0$ om $x \neq 0$ och $f(0) = 1$; konvergensen är likformig i alla slutna delintervall av intervallen $(-\infty, 0)$ och $(0,\infty)$.

c. **P** = **R**, $f(x) = \pi/2$ om $x > 0$, $= -\pi/2$ om $x < 0$ och $= 0$ om $x = 0$; konvergensen är likformig i alla slutna delintervall av intervallen $(-\infty, 0)$ och $(0,\infty)$.

d. **P** = **R**, $f(x) = 0$; konvergensen är likformig i varje kompakt intervall.

e. **P** = **R**, $f(x) = 0$; konvergensen är likformig i alla slutna delintervall av intervallen $[a, \infty)$, $a > -\infty$.

f. **P** = **R**, $f(x) = 0$; konvergensen är likformig i varje kompakt intervall.

g. **P** = $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = 1$ om $-1 < x \leq 1$, $0$ om $|x| > 1$; konvergensen är likformig i alla slutna delintervall av intervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ och $(1, \infty)$.

18.2 **P** betecknar mängden där serien är punktvis konvergent .

a. **P** = $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Konvergensen är likformig i alla slutna delintervall av intervallen $(-\infty, -1)$ och $(1, \infty)$.

b. **P** = $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Konvergensen är likformig i alla slutna delintervall av intervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ och $(1, \infty)$.

c. **P** = $\{x \in \mathbf{R};\ x \neq k\pi,\ k \text{ heltal}\} \cup \{0\}$. Konvergensen är likformig i alla slutna delintervall av intervallen $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k$ heltal och av intervallet $(-\pi,\pi)$.

18.3 a. 0  b. 0  c. $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}/2$

d. $2/\pi$