5B1493, VT07, lekt 18

Mera om serier

Ch VII

Definition av konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent } \Leftrightarrow \; S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ har ett gränsvärde då } N \to \infty.$$

Cauchys konvergenskriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent } \Leftrightarrow \quad \varepsilon > 0, \quad N, \quad p,q \left(N < p < q \quad \left| \sum_{n=p}^{q} a_n \right| < \varepsilon \right) \Leftrightarrow \lim_{\substack{p \to \infty \\ p \le q}} \sum_{n=p}^{q} a_n = 0.$$

(Mycket generell, gäller bl.a. i $\mathbf{R}^n$.)

Tillräckligt (men inte nödvändigt) *villkor för divergens*:

$$a_n \not\to 0 \text{ då } n \to \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent}$$

Speciellt för serier med reella och positiva termer (s.k. *positiva serier*):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent } \Leftrightarrow \; S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ är en begränsad funktion av } N.$$

(För divergenta positiva serier säger man därför att deras summa är = ∞ och i stället för "$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent" skriver man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.)

Majorantprincipen.

$$0 \le a_n \le b_n \text{ och } \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

(Samtidigt utsäger detta att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.)

Rotkriteriet

$$a_n \ge 0 \text{ och } \lim_{n \to \infty} a_n^{\,1/n} = A \begin{cases} < 1 & \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \\ > 1 & \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty. \end{cases}$$

Kvotkriteriet

$$a_n > 0 \text{ och } \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \begin{cases} < 1 & \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \\ > 1 & \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty. \end{cases}$$

För serier i allmänhet

Satsen om absolut konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergent} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent}$$

Obs ! Omvändningen till detta gäller *inte*; det finns konvergenta serier $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ för vilka $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, sådana serier kallas *betingat* konvergenta, de övriga är *absolut* konvergenta. För de absolut konvergenta serierna gäller den "generella kommutativa lagen" – om termerna summeras i någon godtycklig annan ordning, så är den omordnade serien också konvergent och har samma summa.[1]

Sats om alternerande serie (sid 145-146)

Om $a_n > 0$ och *avtar* mot 0 då $n \to \infty$, så är $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent .

(Med hjälp av denna sats kan man lätt konstruera betingat konvergenta serier.

Ex.vis är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergent medan $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{N} \to \infty$, då $N \to \infty$.)

För reella serier gäller att de är betingat konvergenta om och endast om serierna som består av de positiva termerna resp. av de negativa tERmerna båda är divergenta. Termerna i en betingat konvergenta serie kan ordnas om så att seriesumman blir vilken som helst. (Övn 14)

Funktionsserier: (sid 150)

Om $|f_n(x)| \leq a_n$ för alla x **E** och $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (Majorantvillkoret)

så är $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut och likformigt konvergent i **E**.

Konsekvenser:

Om $f_n(x)$ uppfyller villkoret och dessutom är kontinuerliga i **E**, så är seriens summa $f(x)$ också kontinuerlig i **E.**

Om **E** är ett intervall $[a, b]$ **R** och $f_n(x)$ kontinuerliga, så är

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Om derivatorna $f_n'(x)$ uppfyller majorantvillkoret ovan och är kontinuerliga, så gäller

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Speciellt potensserier $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}$

Konvergensmängden är ett intervall med centrum i origo.

Konvergensradien R (= halva konvergensintervallets längd) = $\dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ om

något av dessa gränsvärden existerar eller = ∞.

De formella derivatorna $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d^k}{dx^k} x^n$ har alla samma konvergensradie.

Konvergensen hos potensserien och dess formella derivator är likformig i varje kompakt delintervall av konvergensmängden.

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ för $a \leq x \leq b$ $\qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$

1 Bevis för detta är bökigt, finns i Rosenlicht s 146 - 149. Må hoppas över.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b x^n\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Övningar

Rosenlicht: Ch VII 8. 9, 10, 11, 18, 20, 24