5B1493, VT07, lekt 21

Approximation av lösningar till diverse ekvationer

Ch VIII

Problemtyper som Rosenlicht tar upp i Ch VIII: Lösning av ekvationer $f(x, y) = 0$, $F(y) = y$ och differentialekvationer $y'(x) = f(x, y(x))$ med begynnelsevärde.

1. (Om implicit givna funktioner, ”implicita funktioner”)

Givet: En ekvation av typen

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Sökt: En funktion $y = \phi(x)$, definierad i någon en mängd $\mathbf{I}$, sådan att

$$f(x, \phi(x)) = 0, \text{ för alla } x \quad \mathbf{I}. \tag{2}$$

I enkla fall kan lösningar till ekvationer av typen (1) hittas via formelmanipulering. Ex.vis;

$$x^2y^2 - xy - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{4x^2 - 3}}{2x}.$$

Exemplet illustrerar några olika fenomen som kan inträffa.

– lösningar behöver inte alls finnas (om $|x| < \sqrt{3}/2$ ovan, finns inga reella lösningar)

– det kan finnas flera lösningar (om $|x| > \sqrt{3}/2$ ovan finns det två kontinuerliga lösningar och många fler om man tillåter att lösningarna är diskontinuerliga))

Framför allt vill man kunna hantera mer godtyckliga ekvationer. Huvudresultatet är satsen på sid 174:

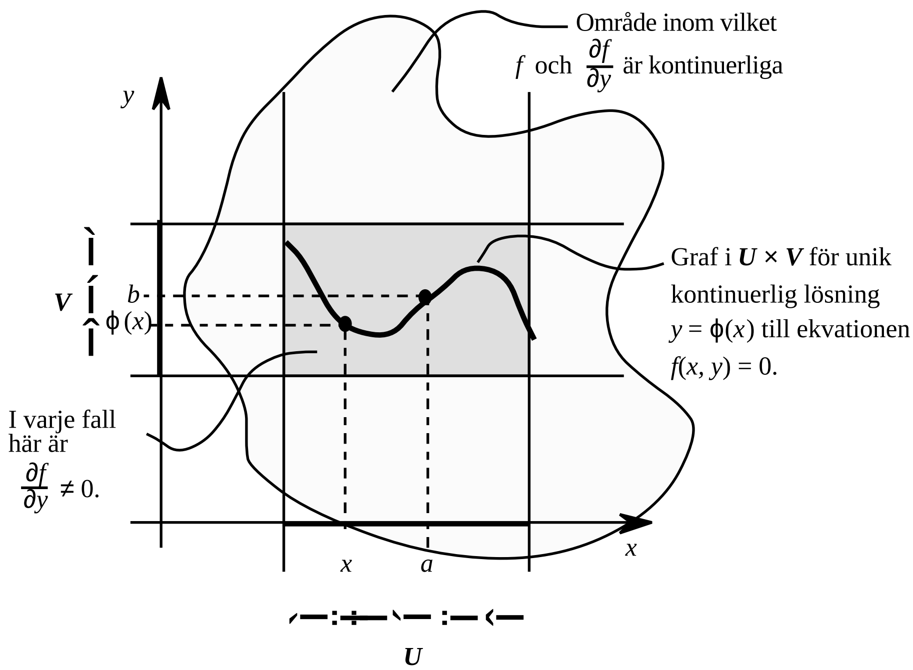
Sats om implicita funktioner

Om $f(x, y)$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i ett öppet område i $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, (3)

$f(a, b) = 0$ för någon punkt (a, b) i området, (4)

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, (5)

så finns det omgivningar $\boldsymbol{U}$ och $\boldsymbol{V}$ till a resp b för vilka det finns precis en funktion $\phi(x)$: $\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$ som satisfierar (2). Denna funktion är kontinuerlig och $\phi(a) = b$.



Satsen är sann i en mycket mera generell tappning. Funktionen $f(x, y)$ kan få vara av typen $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ($x \in \mathbf{R}^m$ och $y \in \mathbf{R}^n$). Det handlar då om att lösa system med n ekvationer, en för var och en av f-vektorns n komponenter ($f_1, f_2, \ldots, f_n$) och med n ”obekanta” – de n komponenterna i vektorn $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Lösningarna blir funktioner av m oberoende variabler – de m komponenterna i x-vektorn.

Villkoret (5) skall då läsas så att matrisen bestående av f:s alla partialderivator (en s.k. Jacobimatris)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

är inverterbar, (dvs. dess determinant är $\neq 0$).

2. (Om existens av lösningar till begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer ”ODE”)

Givet: En ekvation av typen

$$y' = f(x, y), \tag{6}$$

Sökt: En funktion $y = \phi(x)$, definierad i någon mängd $\mathbf{I}$, sådan att

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \text{ samt } \phi(a) = b, \text{ där } a \text{ och } x \in \mathbf{I}. \tag{7}$$

Fenomen som att lösningar saknas eller inte är entydiga finns även här: Ex.vis har problemet

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2},\ y(0) = 0,$$

bl.a. lösningarna $y = 0$ (konstant) och $y = x^3$, medan problemet

$$xy' = 2y,\ y(0) = 1,$$

inte har några lösningar alls. (Obs att ekvationen kräver att $y(0) = 0$.)

Också här vill man kunna hantera mer godtyckliga ekvationer, inte bara sådana som går att lösa med formelmanipulationer. Huvudresultatet finns i satsen på sidan 178.

Sats om lokala lösningar till ODE med begynnelsevillkor.

Om $f(x, y)$ är kontinuerlig i ett öppet område i $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, (8)

och det finns ett tal M sådant att

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq M\,|y - z| \tag{9}$$

för alla (x, y) och $(x, z,)$ i området.

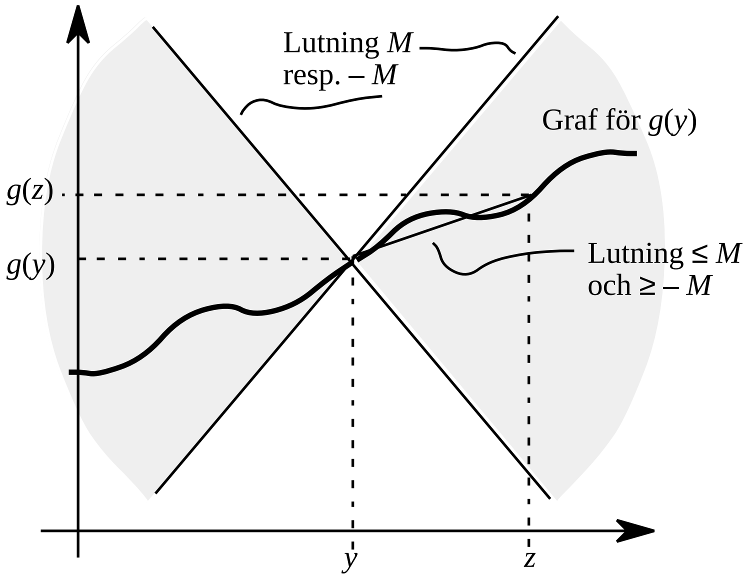
så gäller att om (a, b) ligger i området, så finns det en omgivning $\boldsymbol{U}$ till a i vilken det finns precis en funktion $\phi(x)$: $\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{R}$ som satisfierar (7):

Villkoret (9) kräver möjligen en kommentar. Man säger att en funktion g av typen $\mathbf{R}\ \ \mathbf{U} \to \mathbf{R}$ är *Lipschitzkontinuerlig* om det finns en konstant M sådan att

$$|g(y) - g(z)| \leq M\,|y - z| \tag{10}$$

för alla y och $z \in \mathbf{U}$. Konstanten M kallas ibland *Lipschitzkoefficient*.[1]

1 Begreppet kan likaväl formeuleras för g av typ {metriskt rum} $\to$ {metriskt rum}.



Lipschitzkontinuitet:
Om vinkelfältens centrum placeras i en grafpunkt,
så kommer grafen att ligga helt inom vinkelfälten.

”Lipschitz-kontinuitet” är ett villkor något starkare än bara ”kontinuitet”, men något svagare än att ”ha begränsad derivata”, ty:

– Olikheten (10) medför att $\lim_{z \to y} (g(y) - g(z)) = 0$, dvs att g är kontinuerlig.

– Funktionen $g(y) = y^{1/3}$ är kontinuerlig men inte Lipschitzkontinuerlig eftersom

$$\frac{|g(y) - g(0)|}{|y - 0|} = \frac{|y|^{1/3}}{|y|} = |y|^{-2/3} \to \infty \text{, då } y \to 0.$$

– Om g har begränsad derivata, $|g'(y)| \le M$ för alla x, så gäller enligt medelvärdessatsen

$$|g(y) - g(z)| = |g'(\zeta)| \cdot |y - z| \le M\,|y - z|, \ \zeta \text{ mellan } y \text{ och } z,$$

dvs. g är Lipschitzkontinuerlig.

– Funktionen $g(y) = |y|$ är inte deriverbar i origo men väl Lipschitzkontinuerlig (med $M = 1$).

Villkoret (9) kräver alltså att $f(x, y)$ är Lipschitzkontinuerlig i y-led, likformigt i variabeln x (dvs. M beror inte på x.).

Också satsen om lösningar till differentialekvationer är sann i en mycket mera generell tappning. Funktionen $f(x, y)$ kan få vara av typen $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ($x \quad \mathbf{R}$ och $y \quad \mathbf{R}^n$). Det handlar då om att lösa system med n differentialekvationer, en för var och en av f-vektorns n komponenter $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ och med n ”obekanta funktioner” – de n komponenterna i vektorn $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Detta genomförs (med visst buller) på sid 180 - 188.

Idén i bevisen för dessa satser är att man succesivt approximerar de sökta lösningarna med hjälp av ”självförbättrande” formler.

En mycket generell princip av detta slag handlar om lösning av ekvationer av typen

$$x = F(x)$$

där F är en funktion av typen $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}$, där $\boldsymbol{B}$ är något komplett metriskt rum.

3. *Satsen om fixpunkt till kontraktioner* (sid 170)

Låt F vara en Lipschitzkontinuerlig avbildning: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}$ där $\boldsymbol{B}$ är något komplett metriskt rum med en Lipschitzkoefficient < 1. [1]

(dvs, det finns då en konstant $k < 1$, sådan att $d(F(x), F(y)) \leq k\, d(x, y)$ för alla x och y $\boldsymbol{B}$),

Följden av punkter

$$y_{n+1} = F(y_n),\ y_0 \quad \boldsymbol{B},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

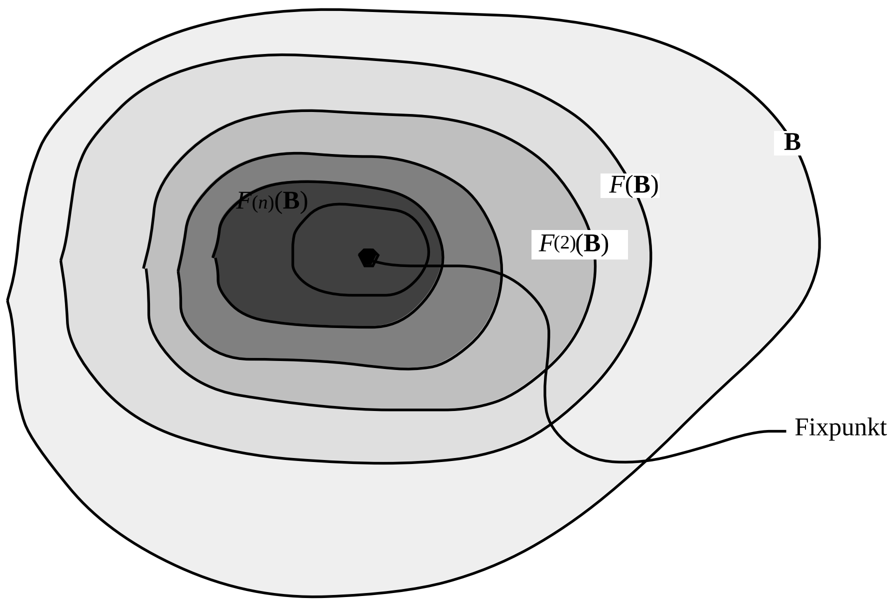
kommer då att konvergera mot lösningen $y = \alpha$ till ekvationen

$$y = F(y).$$

Lösningen är unik och man har som feluppskattning för den n:te approximationen

$$d(y_n, \alpha) \leq k^n \frac{d(y_1, y_0)}{1 - k}$$

Beviset är inte så svårt som man kanske kunde tro (Se Rosenlicht, sid 170 - 171).



Succesiva kontraktioner av metriskt rum

För att bevisa implicita funktionssatsen används i Rosenlicht en avbildning $F(x, y)$, som för varje fixt x $\boldsymbol{U}$[2] är en kontraktion på $\boldsymbol{V}$. Idén till kontraktionen är inspirerad av förfarandet i fig: här bredvid:

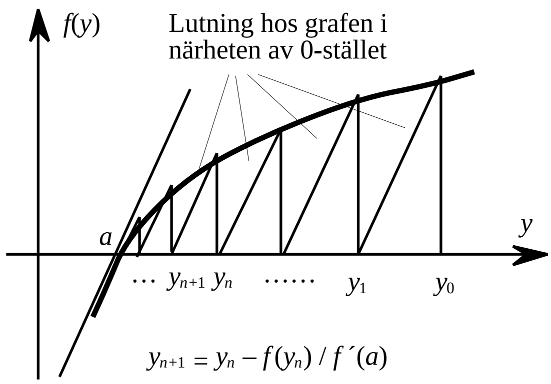
$$F(x, y) = y - \frac{f(x, y)}{f'(a, b)}$$

Gränsväret $\phi(x)$ för iterationen

$$y_{n+1} = F(x, y_n),\ y_0 \quad \boldsymbol{U},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

kommer då att uppfylla likheten

$$\phi(x) = \phi(x) - \frac{f(x, \phi(x))}{f'(a, b)},\ \text{dvs } f(x, \phi(x)) = 0.$$



---

1 Sådana avbildningar kallas *kontraktioner* på ***B***.
2 För beteckningarna se den första figuren ovan.

I fallet med differntialekvationen, formulerar man först om ursprungsproblemet;

sök en funktion $y = \phi(x)$, definierad i någon en mängd **I**, sådan att

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \text{ samt } \phi(a) = b, \text{ där } a \text{ och } x \quad \mathbf{I},$$

till den ekvivalenta integralekvationen:

Sök en funktion $y = \phi(x)$, definierad i någon en mängd **I**, sådan att

$$\phi(x) = b + \int_a^x f(t, \phi(t))\, \mathrm{d}t.$$

Den kontraherande avbildningen

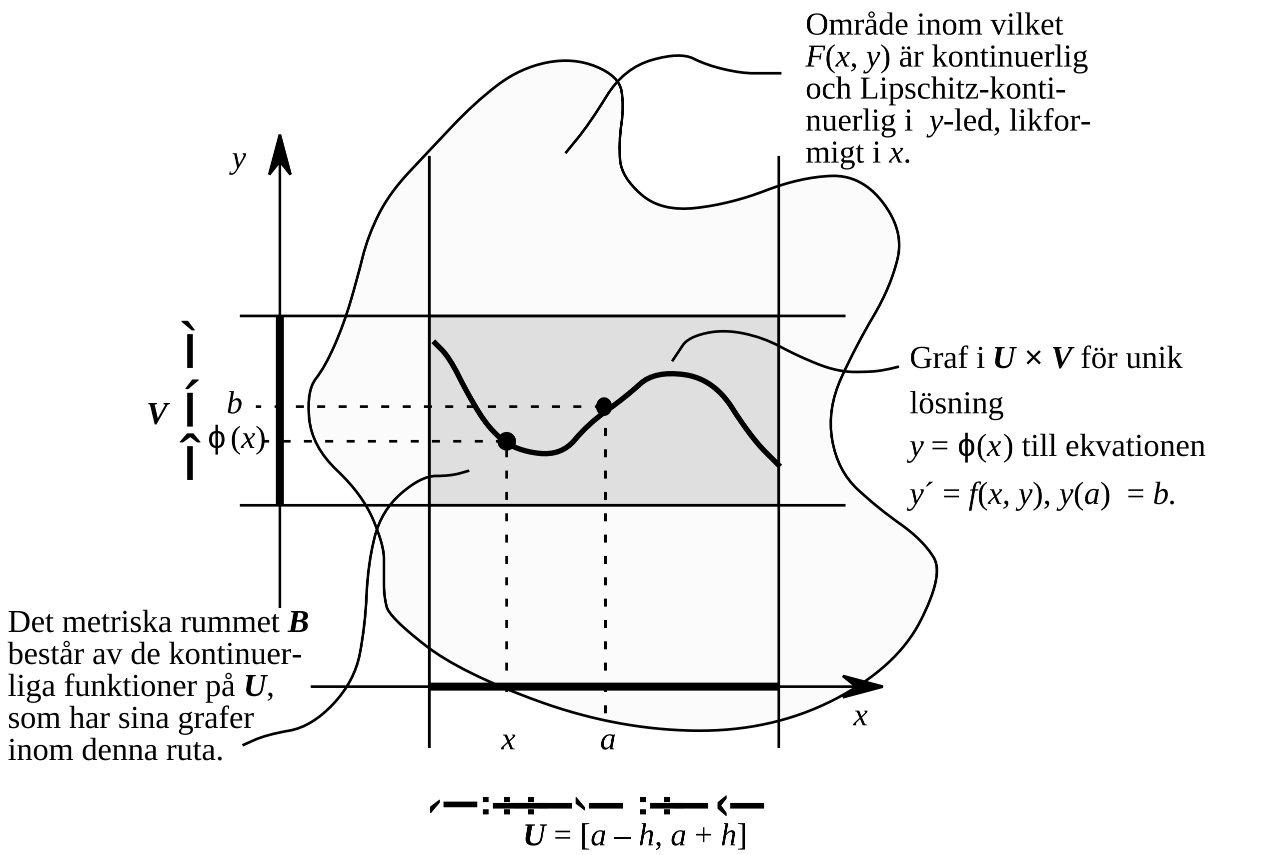
$$\mathcal{F}(y(x)) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, \mathrm{d}t.$$

som man arbetar med här, är av typen $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}$, där $\boldsymbol{B}$ är den delmängd av de kontinuerliga funktionerna på ett lämpligt valt slutet och begränsat intervall $\boldsymbol{U}$ a och som vidare har alla sina värden i ett lämpligt valt slutet område $\boldsymbol{V}$ b.

Metriken på $\boldsymbol{B}$ ges av

$$d(y, z) = \|y - z\| = \max_{x \quad \boldsymbol{U}} |y(x) - z(x)|.$$

Konvergens i $\boldsymbol{B}$ är då liktydigt med likformig konvergens på $\boldsymbol{U}$.



Observera att $\mathcal{F}$ avbildar funktioner på funktioner. För ekvationen $y' = y$, $y(0) = 1$ får man exempelvis iterationsformeln $$y_{n+1}(x) = 1 + \int_a^x y_n(t)\,dt.$$

vilket, om man startar med $y_0(x) = 1$, ger de succesiva approximationerna

$$y_1(x) = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

vilka som bekant konvergerar mot e^x.

Till slut:

Lägg märke till tricket sid 189 att förvandla ODE:n och system av ODE:n till system av 1:a ordningen. Detta är anledningen till att man inte behöver utveckla någon existensteori för högre ordnings ekvationer. Se nedan!

Övningar: Ch VIII 2, 3, 7, 8.

Högre ordnings ekvationer och system av 1:a ordningen

(Tillägg)

Varje system av differentialekvation av högre ordning är ekvivalent med ett 1:a ordningens system.

Tankegången som leder till detta är rätt simpel. Följande exempel får illustrera:

Låt oss betrakta ett system med två obekanta funktioner

$$\begin{cases} x_2''(t) - 9x_1''(t) + 5x_2(t) = t + 1, \\ x_1'''(t) + 2x_1'(t) + x_2'(t) - 7x_1(t) = e^{-t}. \end{cases} \tag{11}$$

Den högsta förekommande derivationsordningen för funktionerna är tydligen 3 respektive 2. Inför man nu tre nya obekanta funktioner $x_3(t)$, $x_4(t)$ och $x_5(t)$ genom att sätta

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_3(t), \\ x_2'(t) = x_4(t), \\ x_1''(t) = x_5(t), \end{cases} \tag{12}$$

så är $$\begin{cases} x_1'''(t) = x_5'(t), \\ x_1''(t) = x_3'(t) = x_5(t), \\ x_2''(t) = x_4'(t), \end{cases}$$

och systemet (11) kan då skrivas

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_3(t), \\ x_2'(t) = x_4(t), \\ x_3'(t) = x_5(t), \\ x_4'(t) - 9x_5(t) + 5x_2(t) = t + 1, \\ x_5'(t) + 2x_3(t) + x_4(t) - 7x_1(t) = e^{-t}, \end{cases} \tag{13}$$

vilket är ett system av ordning 1. Omvänt ser vi att systemet (11) kan härledas ur systemet (13) genom att man eliminerar $x_3(t)$, $x_4(t)$ och $x_5(t)$ ur de två sista ekvationerna med hjälp av de tre första. ■

Man kan tydligen ”köpa” sig till ett första ordningens system mot att man ”betalar” med ett större antal obekanta och ekvationer i systemet – för varje obekant funktion $x_i(t)$ som i det ursprungliga systemet förefinns med derivator upp till och med ordningen k, måste $k-1$ st. nya obekanta och lika många nya ekvationer införas.

Man kan också notera konstgreppet inte förutsätter att ekvationerna nödvändigtvis är linjära – principen gäller alla slags differentialekvationer!

Exempelvis: Ett ”allmänt” andra ordnings system med två obekanta $x_1(t)$ och $x_2(t)$ och två ekvationer har formen

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_2'', t) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_2'', t) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

där F_1 och F_2 är två godtyckliga funktioner av 7 variabler. Sätter man

$$\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \end{cases} \tag{15}$$

så får man det ekvivalenta systemet

$$\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ F_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_3', x_4', t) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_3', x_4', t) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

som är av ordningen 1.

Övningar:

Skriv upp ett ekvivalent 1:a ordningens system till följande:

L21.1 a. $\begin{cases} x_1'' = x_2, \\ x_2'' = x_1. \end{cases}$ b. $\begin{cases} x_1''' = x_2 + \sin t, \\ x_2'' = x_3 \\ x_3' = x_1. \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1'' = -2x_1 - 6x_2, \\ x_2' = x_1 + 3x_2. \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1'' = -4x_1 + x_2 - 2x_1', \\ x_2' = -8x_1 + 2x_2 + x_1'. \end{cases}$

e. $\begin{cases} x_1'' = \sin x_2', \\ x_2'' = x_1 x_2^2. \end{cases}$ f. $x_1'' - x_1 = f(t)$.

L21.2 $\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, där $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

L21.3 a. Ange ett 1:a ordnings system som är ekvivalent med

$$x'' + a_1 x' + a_0 x = 0,\ a_0 \text{ och } a_1 \text{ konstanter.}$$

b. Visa att egenvärdesekvationen till detta system är

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

och att den är identisk med den karakteristiska ekvationen till problemet i a.

L21.4 a. Ange ett 1:a ordnings system som är ekvivalent med

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0,\ a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \text{ konstanter.} \tag{17}$$

b. Visa att egenvärdesekvationen till detta system är

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

c* Visa att determinantvillkoret i b.kan skrivas

$$(-1)^n (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0,$$

dvs. att det är ekvivalent med den karakteristiska ekvationen till den linjära ekvationen (17).

Ledning: Använd vid determinantberäkningen att en determinants värde inte ändras om man ersätter en kolonn med kolonnen + en multipel av en annan kolonn: Addera λ^{k-1} × (kolonn nr k), $k = 2, 3, \dots, n$, till den första kolonnen. Den första kolonnen kommer då, så när som på dess sista element, bara bestå av 0:or. Utveckla sedan efter den första kolonnen.

Svar

1a. $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ x_3' = x_2, \\ x_4' = x_1. \end{cases}$

1b. $\begin{cases} x_1' = x_4, \\ x_2' = x_5, \\ x_3' = x_1, \\ x_4' = x_6, \\ x_5' = x_3, \\ x_6' = x_2 + \sin t. \end{cases}$

1c. $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = \quad x_1 + 3x_2, \\ x_3' = -2x_1 - 6x_2. \end{cases}$

1d. $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = -8x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x_3' = -4x_1 + x_2 - 2x_3. \end{cases}$

1e. $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ x_3' = \sin x_4, \\ x_4' = x_1x_2^2. \end{cases}$

1f. $\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_1.+ f(t). \end{cases}$

2. $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$, där $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$