5B1493, VT07, lekt 22

Differentiaring av funktioner av typ $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$

(Ch IX)

Linjära funktioner

Funktionen

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

där koefficienterna a_{ik} är konstanta, kallas en *linjär funktion* av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.
På matrisform kan sambandet skrivas:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

eller

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

Differentierbara funktioner (Ch !X, §1)

En funktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ sägs vara *differentierbar i punkten* $\boldsymbol{x}$ om den är definierad i en omgivning till $\boldsymbol{x}$ och om

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{h} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})\cdot|\boldsymbol{h}|$$

där $\boldsymbol{A}$ är en av $\boldsymbol{h}$ oberoende matris och där

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) = \mathbf{0}$$

Matrisen $\boldsymbol{A}$ är *Jacobimatrisen* för funktionen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

där elementen är *partialderivator*.

T.ex. $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ är derivatan av den envariabelfunktion man får, om man i $f_1(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ betraktar $x_2 ,\ldots, x_n$ som konstanter.

För funktioner av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kallas Jacobimatrisen

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \right) = \text{grad}\, f(\boldsymbol{x})$$

gradienten för f:

Speciellt är funktionen $f(x,y)$ differentierbar i punkten (a,b) om och endast om

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot (y-b) + R(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \cdot \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

där $$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} R(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = 0$$

Nödvändiga villkor för differentierbarhet (sid 195)

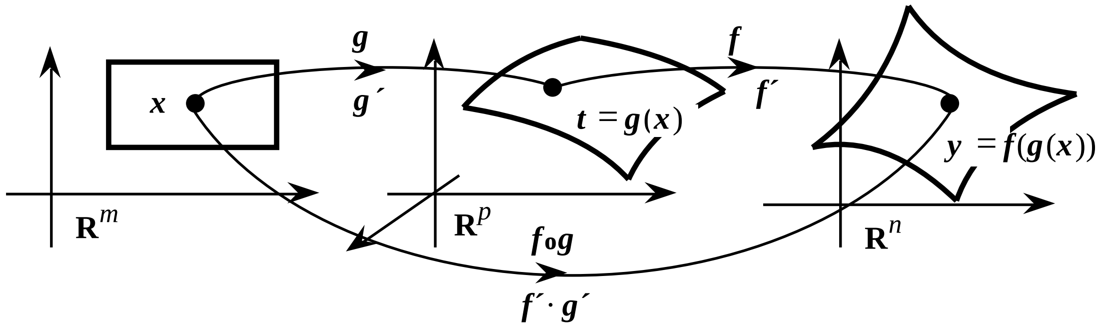
Om $\boldsymbol{f}$ är differentierbar i en punkt så är $\boldsymbol{f}$ *kontinuerlig* i punkten *och har partiella derivator* med avseende på alla sina variabler.

Tillräckligt villkor för differentierbarhet (sid 197)

Om *alla partiella derivator* till $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *är kontinuerliga* i en omgivning av en punkt så är $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ differentierbar i omgivningen

Kedjeregeln (sid 200-201)

$$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))]' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$$



Några viktiga specialfall:

1. För funktionen $f(x(t),y(t))$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t),y(t)) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

2. För funktionen $z(x(u,v),y(u,v))$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

3. Om funktionen $(x,y) = (x(u,v),y(u,v))$ och dess invers är differentierbara, så är

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dvs.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1}$$

Riktningsderivata

För en funktion av typ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ är *riktningsderivatan i punkten* $\boldsymbol{x}$ *i riktningen* $\boldsymbol{v}$ $\mathbf{R}^{\boldsymbol{n}}$

$$f_{\boldsymbol{v}}'(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{h} = (\text{grad } f)(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}$$

Gradient, geometrisk tolkning

grad $f(\boldsymbol{x})$ är riktad åt det håll i vilket riktningsderivatan är störst,
$|\text{grad } f(\boldsymbol{x})|$ är den största riktningsderivatan i punkten $\boldsymbol{r}$.

Generaliseringar till normerade vektorrum

För $\boldsymbol{f}$ är funktioner av typ $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ där $\boldsymbol{V}$ och $\boldsymbol{W}$ är normerade vektorrum:

Frechétderivata

Om

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})\cdot|\boldsymbol{h}|,$$

där $\boldsymbol{T}$ är en linjär avbildning $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ (beroende av $\boldsymbol{x}$) och $\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{0}$,

så är $\boldsymbol{T}$ *Frechétderivatan* av $\boldsymbol{f}$ i punkten $\boldsymbol{x}$.

Gateauxderivata

För en funktion av typ $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ är *Gateauxderivatan i punkten* $\boldsymbol{x}$ *i riktningen* $\boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{V}$.

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{h} \quad \boldsymbol{W},$$

I punkter där Frechétderivatan existerar gäller

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$$

Övningar:
CH XI 1, 2, 9, 11, 19